

การวิเคราะห์ความเค้นของแท่งรับการบิดหน้าตัดหลายเหลี่ยมที่สมมาตร
รอบแกนและด้านของรูปเท่ากันโดยการประยุกต์ใช้รูปร่างการกระจาย
ความเค้นของแท่งรับการบิดหน้าตัดสามเหลี่ยมด้านเท่า
**Stress Analysis of Torsion Bar with Regular Polygonal Cross-Section by
Applying Geometrical Stress of Torsion Bar with Equilateral Triangular
Cross-Section**

สุรเชษฐ์ ทนัชไชย^{1*}, วิวัฒน์ คล่องพานิช¹, เก่งกมล วิรัตน์เกษม¹ และ สมชาย พัฒนา¹

¹ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จ.เชียงใหม่ 50200

*ผู้ติดต่อ: โทรศัพท์: 053 944 146, โทรสาร: 053 944 145

E-mail: me4506412@hotmail.com

บทคัดย่อ

ปัญหาเกี่ยวกับการบิดมีสมการที่สามารถแก้ปัญหาเรื่องความเค้นได้อย่างถูกต้องเมื่อหน้าตัดของแท่งบิดมีรูปร่างพื้นฐาน เช่น สามเหลี่ยมด้านเท่า สี่เหลี่ยม วงกลม เป็นต้น ซึ่งรูปแบบสมการความเค้นของแท่งบิดหน้าตัดสามเหลี่ยมด้านเท่า สี่เหลี่ยม วงกลม นั้นจะแตกต่างกันออกไป อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาหน้าตัดที่เป็นรูปหลายเหลี่ยมที่สมมาตรรอบแกนและด้านของรูปเท่ากันแล้วก็จะพบว่าประกอบขึ้นมาจากรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อยที่เหมือนกันประกอบกันขึ้นมา โดยที่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อยเหล่านี้จะมีรูปร่างการกระจายความเค้นที่คล้ายคลึงกันไม่ว่าหน้าตัดของแท่งบิดจะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า สี่เหลี่ยมจัตุรัส หรือรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า งานวิจัยนี้จึงทำการหาสมการความเค้นสูงสุดของแท่งหน้าตัดหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่สมมาตรรอบแกนรับการบิดที่ปลาย ซึ่งเริ่มต้นจากการแปลงสมการความเค้นสูงสุดของแท่งบิดหน้าตัดสามเหลี่ยมด้านเท่าให้อยู่ในพิกัดเชิงขั้วและอยู่ในรูปของความยาวด้าน มุมและจำนวนเหลี่ยม จากนั้นนำไปคูณด้วยเทอมปรับค่าความเค้น เพื่อให้สามารถใช้สมการนี้หาค่าความเค้นสูงสุดในหน้าตัดสามเหลี่ยมด้านเท่าจนถึงวงกลม โดยเทอมปรับค่าความเค้นนั้นจะเป็นฟังก์ชันของจำนวนเหลี่ยม ผลการปรับค่าทำให้ได้สมการความเค้นสูงสุดเพียงสมการเดียวที่สามารถบอกค่าความเค้นสูงสุดของแท่งหน้าตัดหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่สมมาตรรอบแกนรับการบิดที่ปลายซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ซับซ้อน โดยค่าความเค้นสูงสุดที่ได้จากการใช้สมการนี้จะมีความแตกต่างไม่ถึง 1 % เมื่อเปรียบเทียบกับค่าความเค้นสูงสุดที่ได้จากงานวิจัยของ K. Lee ซึ่งใช้สมการทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงในการวิเคราะห์และใช้เทอมในการคำนวณกว่า 50,000 เทอมในอนุกรมอนันต์ นอกจากนี้เมื่อนำสมการความเค้นสูงสุดที่สร้างขึ้นนี้ไปประมาณค่าความเค้นสูงสุดในแท่งบิดหน้าตัดวงกลมจะพบว่ามีความแตกต่าง 6.5 % เมื่อเปรียบเทียบกับค่าความเค้นสูงสุดที่ได้จากสมการการบิดของเพลากลม

คำหลัก: การบิดของแท่งปริซึมหน้าตัดหลายเหลี่ยมด้านเท่า, รูปร่างการกระจายความเค้นรอบจุดเซนทรอยด์ของแท่งหน้าตัดหลายเหลี่ยมรับการบิด, สมการความเค้นสูงสุดของแท่งบิดหน้าตัดหลายเหลี่ยมด้านเท่า

Abstract

Stress analysis of torsional problem can be solved by exact solution when cross sections of torsional bar have simple shape such as equilateral triangle, rectangular and circle but the equation forms are difference. However, regular polygonal cross section is consisted of the same isosceles triangles. Stress profiles of isosceles triangle are analogy for torsional bar with any regular polygonal cross section. This research is aimed to find maximum stress equation for torsional problem with regular polygonal cross section. The first, maximum stress equation of equilateral triangular cross section was converted to polar form in function of angular isosceles triangle, length and n-sized polygon. Then it was multiplied by adjustable stress term, which is function of n-sized polygon. The adjusted equation is applied to any regular polygon from equilateral triangle to the circular cross section for finding maximum stress. Result of adjustable stress gave general maximum stress equation for regular polygonal cross section in simple form. On comparing this equation with maximum stress equation by K. Lee equation, which infinite series are used by 50,000 terms for compute, gave an error less than 1 % and 6.5 % error for approximate maximum stress of circular cross section.

Keywords: Torsion of regular polygon, Stress profiles of regular polygon about centroid, Maximum stress equation of torsion bar with regular polygonal cross section.

รายการสัญลักษณ์

u, v, w	องค์ประกอบการเปลี่ยนตำแหน่ง
ϵ	ความเครียดตั้งฉาก
γ	ความเครียดเฉือน
σ	ความเค้นตั้งฉาก
τ	ความเค้นเฉือน
θ	มุมบิดต่อหน่วยความยาว
G	มอดุลัสเฉือน
X, Y, Z	แรงเนื่องจากน้ำหนักต่อปริมาตร
\emptyset	ฟังก์ชันความเค้น
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	แรงบนพื้นผิวต่อพื้นที่
l, m, n	โคไซน์แสดงทิศทาง
\vec{N}	เวกเตอร์หนึ่งหน่วย
T	แรงบิด
h	ความสูงของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
β, α	มุมของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
a	ความยาวด้านของรูปหลายเหลี่ยม
n	จำนวนด้านของรูปหลายเหลี่ยม

1. บทนำ

การบิด (Torsion) ของเพลากลมนั้นค่าความเค้นเฉือนในหน้าตัดที่ตั้งฉากกับเพลามีทิศทางอยู่ในแนวสัมผัสและกระจายตัวแบบเชิงเส้นกล่าวคือเป็นศูนย์ที่จุดศูนย์กลางและมากที่สุดที่ขอบของหน้าตัด สมการของความเค้นในการบิดของเพลากลมจะมีรูปแบบที่ค่อนข้างง่าย ซึ่งมาจากสมมติฐานที่ว่าระนาบหน้าตัดไม่มีการบิดเบี้ยวเมื่อมีแรงบิดมากระทำอีกทั้งยังไม่มีการปูดเบี้ยว (warping) ในระนาบหน้าตัดของตัวมันเอง

การบิดของแท่งปริซึมที่หน้าตัดไม่ใช่วงกลม ระนาบหน้าตัดที่ตั้งฉากจะเกิดการปูดเบี้ยวขึ้นและการกระจายของความเค้นเฉือนจะไม่เป็นเชิงเส้นแต่เป็นเส้นโค้งซึ่งจะมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดมุมของหน้าตัดและจุดศูนย์กลางการบิด

ปัญหาเกี่ยวกับการบิดนั้น มีสมการที่สามารถแก้ปัญหาเรื่องความเค้นได้อย่างถูกต้องเมื่อหน้าตัดของแท่งบิดมีรูปร่างง่าย ๆ เช่น สามเหลี่ยมด้านเท่า

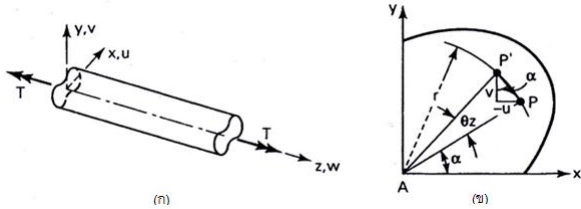
สี่เหลี่ยม วงกลม เป็นต้น ซึ่งรูปแบบของสมการความเค้นของแท่งบิดหน้าตัดรูปร่างสามเหลี่ยมด้านเท่าสี่เหลี่ยม วงกลม นั้นจะแตกต่างกันออกไป กล่าวคือหน้าตัดสามเหลี่ยมด้านเท่า มีรูปแบบสมการแบบหนึ่งสี่เหลี่ยมมีแบบหนึ่ง และ วงกลมก็มีรูปแบบสมการอีกแบบหนึ่ง ถ้าเราสามารถพัฒนาสมการความเค้นของการบิดให้อยู่ในรูปทั่วไปโดยสามารถใช้ได้กับหน้าตัดเหลี่ยมใดๆ จะสามารถลดจำนวนสมการความเค้นของแท่งบิดหน้าตัดรูปร่างต่างๆให้เหลือเพียงสมการเดียวด้วยเหตุผลนี้จึงมีนักวิจัยหลายๆท่านทำการวิจัยเพื่อหาสมการดังกล่าวออกมา ดังเช่น ในปี 1934 B. R. Seth [5] นำเสนอสมการการแก้ปัญหาการบิดของคานหน้าตัดหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านจำนวน n ด้าน โดยใช้พื้นฐานจากสมการ Trefftz integral และ Schwarz-Christoffel transformation เข้าช่วย ผลคือได้สมการความเค้นของการบิดของคานหน้าตัดหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านจำนวน n ด้านซึ่งอยู่ในรูปของฟังก์ชันแกมมา และอนุกรมอนันต์, ปี 2002 W. C. Hassenpflug [1] นำเสนอการแก้ปัญหาการบิดของแท่งสมำเสมอหน้าตัดเป็นรูปหลายเหลี่ยมใดๆ โดยใช้พื้นฐานของสมการ Trefftz integral สำหรับฟังก์ชันการบิดเชิงซ้อน สมการควบคุมประกอบด้วยอินทิกรัล first-order ของ Schwarz-Christoffel mapping และ Trefftz integral โดยสุดท้ายจะได้ผลลัพธ์เป็นสมการที่อยู่ในรูปของ explicit corner function, อนุกรมของ Frobenius และ อนุกรมของ Taylor ซึ่งสมการนี้สามารถใช้หาค่าความเค้นบนหน้าตัดรูปร่างหลายเหลี่ยมได้, ปี 2005 J. A. Kolodziej [2] และ A. Fraska นำเสนอสมการการแก้ปัญหาการบิดในช่วงอีลาสติกของแท่งหน้าตัดหลายเหลี่ยมด้านเท่า โดยใช้พื้นฐานของ boundary collocation method ซึ่งเป็นวิธีการที่ง่ายที่สุดของ Trefftz method สำหรับการหาค่า Stress function จะเริ่มจากทำสมการควบคุมของ Poisson's ให้อยู่ในเทอมไร้นิพจน์จากนั้นใช้วิธี boundary collocation method แก้สมการ Poisson's เพื่อหาค่า Stress function แล้วทำการแทนเงื่อนไขที่ขอบลงไป สุดท้ายก็จะได้ Stress function ที่สมบูรณ์

ซึ่งสามารถนำไปใช้หาความเค้นที่กระทำกับแท่งบิด, ปี 2007 Chein-Shan Liu [3] นำเสนอการแก้ปัญหาการบิดในช่วงอีลาสติกของแท่งสมำเสมอที่มีหน้าตัดเป็นรูปใดๆ โดยใช้พื้นฐานของวิธีการ meshless regularized integral equation method (MRIEM) การแก้ปัญหาเริ่มจากใช้ First kind Fredholm integral equation บนวงกลมปลอมที่สร้างขึ้นปิดล้อมรูปหน้าตัดแท่งบิด แล้วทำการวิเคราะห์หาค่าตอบของ conjugate warping function กับความเค้นเฉือนด้วยวิธี semi-analytical สำหรับการเลือก regularized parameter จะทำตาม minimum principle of laplace equation ซึ่งผลที่ได้จากวิธี MRIEM นี้จะมีความถูกต้องเมื่อเทียบกับค่าแท้จริง และ ปี 2007 K. Lee [4] นำเสนอสมการการแก้ปัญหาการบิดของแท่ง fiber หน้าตัดหลายเหลี่ยมด้านเท่าที่มีด้านจำนวน n ด้าน โดยใช้พื้นฐานของวิธีการ Complex variable ตามหลักการที่ว่าถ้าหากวงกลมหนึ่งหน่วยสามารถทำ conformal mapping ลงบนหน้าตัดของแท่งบิดได้ การแก้ปัญหาการบิดก็จะสามารถทำได้ด้วยวิธีการ complex integral ด้วยเหตุนี้จึงใช้สมการ Schwarz-Christoffel formula ในรูปของอนุกรมกำลังเพื่อทำการ mapping function จากข้างในวงกลมหนึ่งหน่วยไปยังข้างในหน้าตัดรูปร่างหลายเหลี่ยมด้านเท่า สุดท้ายจะได้สมการทั่วไปในการหาค่าความเค้นออกมา โดยที่ผลลัพธ์ของการหาค่าความเค้นสูงสุดมาจากการคำนวณซึ่งใช้อนุกรมกำลัง 50,000 เทอม เป็นต้น จะเห็นได้ว่างานวิจัยส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงที่ซับซ้อน สำหรับงานวิจัยนี้จะใช้แนวคิดจากความคล้ายคลึงของรูปร่างการกระจายความเค้นของหน้าตัดรูปร่างหลายเหลี่ยมด้านเท่าต่างๆ เพื่อหาสมการทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ซับซ้อนสำหรับใช้คำนวณค่าความเค้นสูงสุดของแท่งบิดหน้าตัดหลายเหลี่ยมด้านเท่าโดยจะเปรียบเทียบกับค่าความเค้นสูงสุดกับงานวิจัยของ K. Lee (2007)

2. ทฤษฎีการบิด

การแก้ปัญหาการบิดที่ถูกต้องจะใช้วิธีการของ Semi-Inverse ซึ่ง St. Venant ได้ตั้งสมมติฐานไว้ 2 ข้อ

คือ การบิดเบี้ยว (warping) ของหน้าตัดจะเหมือนกัน ในทุกๆหน้าตัดของแท่งบิด [8] และเงาฉาย (projection) ของหน้าตัดที่บิดเบี้ยวบนระนาบ xy จะมีการหมุนแบบวัตถุแข็งเกร็ง โดยสมมติฐานนี้จะนำไปแก้ปัญหาสมการสมดุลและเงื่อนไขที่ขอบ



รูปที่ 1 (ก) แท่งปริซึมรับคู่ควบที่ปลายทั้งสอง [10]

(ข) การเปลี่ยนตำแหน่งของจุดบนหน้าตัด [10]

พิจารณาแท่งปริซึมที่มีหน้าตัดใดๆคงที่ อยู่ภายใต้การกระทำของ คู่ควบที่บริเวณ ปลายทั้งสองของแท่ง ซึ่งมีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงกันข้าม (รูปที่ 1ก) จุดกำเนิดของระบบพิกัด x, y และ z ในรูปตั้งอยู่ที่ปลายด้านหนึ่งตรงตำแหน่งจุดศูนย์กลางการบิด (Center of twist) ของหน้าตัด โดยแกน z จะผ่านจุดศูนย์กลางการบิดของทุกหน้าตัด พิจารณารูปที่ 1ข ซึ่งแสดงบางส่วนของปลายแท่ง ที่จุด $p(x, y)$ ไต ุบนหน้าตัดอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางการบิด (จุด A) เป็นระยะ r ถูกย้ายไปอยู่ที่ตำแหน่ง $p'(x-u, y+v)$ เนื่องจากการบิด สมมติว่าไม่มีการหมุนเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง $z = 0$ และมุมของการบิดต่อหนึ่งหน่วยความยาว (angle of twist per unit length) ของแท่ง θ , เป็นค่าคงที่ที่มีค่าน้อย การเปลี่ยนตำแหน่ง ในแนว x และ y ของจุด p สามารถแสดงได้ดังนี้ [10]

$$u = -(r\theta z) \sin \alpha = -y\theta z \quad (1)$$

$$v = (r\theta z) \cos \alpha = x\theta z \quad (2)$$

โดยที่ θz คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของเส้น AP ที่

ระยะ z จากปลายด้านซ้าย ($z=0$)

x, y และ z คือ พิกัดของจุด p

α คือ มุมระหว่างเส้น AP และ แกน x

การบิดเบี้ยวของหน้าตัดถูกนิยามโดยฟังก์ชัน ψ ซึ่งเขียนได้เป็น [8]

$$w = \theta\psi(x, y) \quad (3)$$

เมื่อ w คือ ระยะเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน z

นำสมการ (1), (2) และ (3) แทนค่าลงในสมการความเครียด 3 มิติ จะได้

$$\begin{aligned} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right)$$

จากนั้นทำการหาค่าประกอบของความเค้นโดยการแทนค่าสมการ (4) ลงในสมการของ Hooke's Law ใน 3 มิติ

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \quad (5)$$

ทำให้ได้ว่าในระนาบของหน้าตัด ที่ตำแหน่งต่างๆ จะมีความเค้นเฉือนกระทำ ซึ่งแยกเป็นองค์ประกอบได้ 2 องค์ประกอบ คือ τ_{xz} และ τ_{yz}

2.1 Prandtl's Stress Function

เมื่อนำสมการ (5) แทนค่าลงในสมการสมดุลในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

เมื่อ X, Y, Z คือ ค่า body forces per unit volume โดยไม่คิดค่า body forces สมการสมดุลเชิงอนุพันธ์จะลดลงเหลือ

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

ในปี 1903 Prandtl ได้นำเสนอ τ_{xz} และ τ_{yz} ในเทอมของ stress function $\phi(x, y)$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (8)$$

จะเห็นได้ว่าสมการความเค้นในเทอม stress function นี้ไม่ทำให้ความหมายของสมการ (6) เปลี่ยนแปลง

จากสมการ (5) และ (7) ทำให้ได้

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \quad (9)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \quad (10)$$

ทำการกำจัด ψ โดยทำอนุพันธ์สมการ (9) เทียบกับ y และสมการ (10) เทียบกับ x จากนั้นนำสมการ (10) ไปลบออกจากสมการ (9)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (11)$$

พิจารณาเงื่อนไขที่ขอบจากสมการ

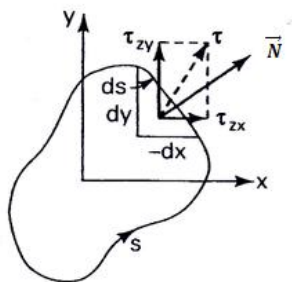
$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ \bar{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \end{aligned} \quad (12)$$

$$\bar{Z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n$$

โดยที่ $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ คือ surface forces per unit area ในทิศทางของ x, y และ z ตามลำดับ และ l, m, n คือ มุมที่เวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย normal (\vec{N}) ของพื้นผิวพิจารณาทำกับแกน x, y และ z ตามลำดับ

เงื่อนไขที่ขอบสำหรับพื้นผิวที่อยู่ด้านข้างของแท่ง บิด ซึ่งไม่มีแรงภายนอกกระทำและมีเวกเตอร์หนึ่ง หน่วย normal (\vec{N}) ทำมุมตั้งฉากกับแกน z จะได้ว่า $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$ และ $\cos \vec{N}z = n = 0$ ทำให้ สมการเงื่อนไขที่ขอบลดรูปลงเป็น

$$\tau_{xz} l + \tau_{yz} m = 0 \quad (13)$$



รูปที่ 2 หน้าตัดใดๆของแท่งปริซึมรับการบิด [10]

จากรูปที่ 2 พิจารณาส่วนเล็กๆบริเวณขอบและ s เพิ่มขึ้นในทิศทวนเข็มนาฬิกาทำให้ได้

$$l = \cos \vec{N}x = \frac{dy}{ds} \quad m = \cos \vec{N}y = -\frac{dx}{ds} \quad (14)$$

จากสมการ (8) และ (14) สามารถเขียนสมการ (13) ได้เป็น

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (15)$$

นั่นแสดงว่า stress function จะเป็นค่าคงที่ตาม เส้นขอบของหน้าตัด สำหรับหน้าตัดแบบ solid สามารถกำหนดให้ $\phi(x, y) = 0$

ดังนั้นการหาค่าความเค้นบนหน้าตัดของแท่งบิด อยู่จากการหาค่าของ $\phi(x, y)$ จากสมการ (11) และ $\phi(x, y) = 0$ ที่เส้นขอบของหน้าตัด

เงื่อนไขที่ขอบสำหรับปลายทั้งสองของแท่งบิดจะ พบว่าเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย normal (\vec{N}) ของพื้นผิวที่ปลายแท่งขนานกับแกน z เพราะฉะนั้น $l = m = 0, n = \pm 1$ และเมื่อแทนค่าลงในสมการ เงื่อนไขที่ขอบจะได้ว่า

$$\bar{X} = \pm \tau_{xz} \quad (16)$$

$$\bar{Y} = \pm \tau_{yz}$$

ทำการคำนวณค่าแรงลัพธ์บนปลายหน้าตัดโดย แทนค่าสมการ (8) ลงในสมการ (16) และสังเกตว่า $\phi(x, y) = 0$ ที่เส้นขอบของหน้าตัด จะพบว่าแรง ลัพธ์ที่กระจายบนพื้นผิวที่ปลายแท่งเป็นศูนย์แต่แรง เหล่านี้จะทำให้เกิดคู่ควบที่มีขนาดดังนี้

$$\begin{aligned} T &= \iint (\bar{Y}x - \bar{X}y) dx dy \\ &= - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx dy - \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} y dx dy \end{aligned}$$

ทำปริพันธ์แบบแยกส่วน (by parts) และสังเกตว่า $\phi(x, y) = 0$ ที่เส้นขอบของหน้าตัด จะได้ค่าแรงบิด คือ

$$T = 2 \iint_A \phi(x, y) dx dy \quad (17)$$

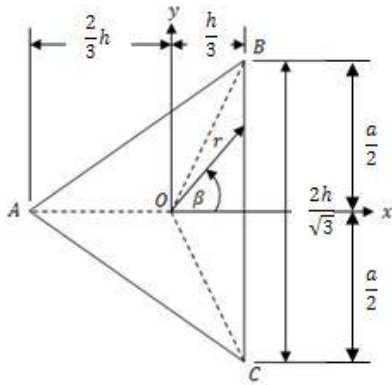
3. หลักการและการวิเคราะห์

3.1 ความคล้ายคลึงของรูปร่างการกระจายความเค้น

3.1.1 สมการความเค้นของแท่งบิดหน้าตัด

สามเหลี่ยมด้านเท่าและสี่เหลี่ยมด้านเท่า

3.1.1.1 แท่งบิดหน้าตัดสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปที่ 3 แท่งปริซึมหน้าตัดสามเหลี่ยมด้านเท่า
สมการของ stress function คือ

$$\phi_{Tri} = -\frac{G\theta}{2h} \left(-\frac{h}{3} + x\right) \left(\frac{2h}{3} + x - \sqrt{3}y\right) \left(\frac{2h}{3} + x + \sqrt{3}y\right) \quad (18)$$

ซึ่งได้มาจากการแก้สมการเงื่อนไขที่ขอบ

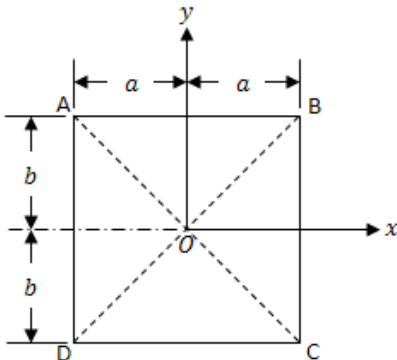
$$\phi(x, y) = 0 \text{ และสมการ (11)}$$

จากสมการ (8) จะได้ว่า

$$\tau_{xz} = -G\theta \left[y - \frac{3xy}{h} \right] \quad (19)$$

$$\tau_{yz} = G\theta \left[x + \frac{3x^2}{2h} - \frac{3y^2}{2h} \right] \quad (20)$$

3.1.1.2 แท่งบิดหน้าตัดสี่เหลี่ยมด้านเท่า



รูปที่ 4 แท่งปริซึมหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส

สมการของ stress function ได้มาจากการวิเคราะห์
ความคล้ายคลึงของเมมเบรน คือ

$$\phi = \frac{32G\theta a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{(n-1)/2} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y/2a)}{\cosh(n\pi b/2a)} \right] \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad (21)$$

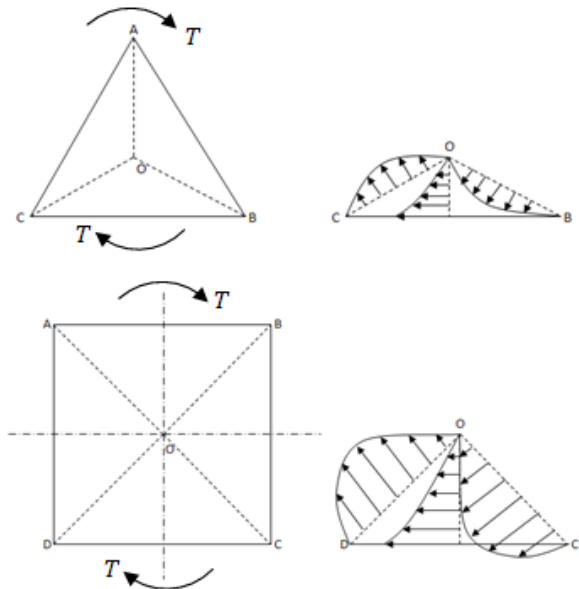
โดยค่าความเค้นองค์ประกอบหาจากสมการ (8)

ค่าความเค้นลัพธ์ของหน้าตัดทั้ง 2 คือ

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \quad (22)$$

3.1.2 รูปร่างการกระจายความเค้น

เมื่อหาค่าความเค้นที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนหน้าตัด
จากสมการของหน้าตัดสามเหลี่ยมด้านเท่าและ
สี่เหลี่ยมจัตุรัสแล้วนำมาเขียนเป็นรูปร่างการกระจาย
ความเค้นลงบนหน้าตัด



รูปที่ 5 การกระจายความเค้นของสามเหลี่ยม
หน้าจั่วย่อย

จะพบว่า การกระจายความเค้นของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
ย่อยรอบจุดเซนทรอยด์จะมีรูปร่างที่คล้ายคลึงกัน โดย
จะมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดมุมทั้ง 3 ของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
และมีค่าสูงสุดตรงจุดกึ่งกลางของฐานสามเหลี่ยมหน้า
จั่ว แต่จะแตกต่างกันในเรื่องของแอมพลิจูดของเส้น
โค้งการกระจายความเค้นเท่านั้น นอกจากนี้การ
กระจายความเค้นของสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อยในหน้า
ตัดเดียวกันจะเหมือนกัน

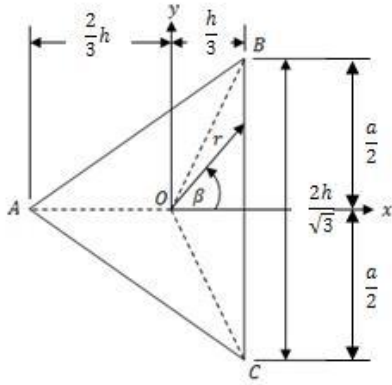
3.2 หลักการ

รูปร่างของ สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม หรือเหลี่ยมด้าน
เท่าใด ๆ ล้วนแล้วแต่มี สามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อยประกอบ
กันขึ้นมาเป็นรูปร่างแต่จะแตกต่างกันในเรื่องค่าของ
มุมภายในของสามเหลี่ยม หน้าจั่วย่อย ดังนั้นถ้าเรา
สามารถแปลงสมการความเค้นของหน้าตัดสามเหลี่ยม
ด้านเท่าโดยให้สมการอยู่ในรูปแบบที่เกี่ยวข้องกับค่า
มุมภายในของสามเหลี่ยม หน้าจั่วย่อย ความยาวด้าน
และจำนวนเหลี่ยม ได้ เราก็จะสามารถใช้สมการนี้ค่า

หาของความเค้นของรูปเหลี่ยมใดๆที่มีด้านเท่ากันและ
สมมาตรรอบแกนได้

3.3 การวิเคราะห์

3.3.1 ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของรูปหลาย เหลี่ยมด้านเท่า



รูปที่ 3 แท่งปริซึมหน้าตัดสามเหลี่ยมด้านเท่า
เราจะใช้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นตัวแทนในการหา
ความสัมพันธ์ของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า

กำหนดให้ $\alpha = \beta_{max}$ และ $\alpha = \frac{\pi}{n}$
เมื่อ n คือ จำนวนเหลี่ยมของหน้าตัด

จากการพิจารณาความสัมพันธ์ของมุมและด้านจะ
พบว่า

$$h = \frac{3a}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad (23)$$

$$r_{End} = \frac{a}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos \beta} \quad (24)$$

เมื่อ a คือความยาวด้าน

3.3.2 ค่าความเค้นของแท่งบิดหน้าตัดสามเหลี่ยม ด้านเท่าในพิกัดเชิงขั้ว

จากความสัมพันธ์ของมุมบิดต่อหนึ่งหน่วยความ
ยาวกับแรงบิดของหน้าตัดสามเหลี่ยมด้านเท่า [7],[11]

$$\theta = \frac{15\sqrt{3}T}{Gh^4} \quad (25)$$

สมการ (19) และ (20) จะกลายเป็น

$$\tau_{xz} = -\frac{15\sqrt{3}T(h-3x)y}{h^5} \quad (26)$$

$$\tau_{yz} = \frac{15\sqrt{3}T(2hx+3x^2-3y^2)}{2h^5} \quad (27)$$

ทำการเปลี่ยนรูปสมการความเค้น (26) และ (27)
ให้อยู่ในพิกัดเชิงขั้ว เนื่องจากเหตุผลของการสมมาตร
ของการกระจายความเค้นของสามเหลี่ยมย่อยรอบจุด
กำเนิด

จากความสัมพันธ์

$$x = r \cos \beta \quad y = r \sin \beta$$

และสมการ (23) จะได้ว่า

$$\tau_{xz} = \frac{80rT \tan^5\left(\frac{\pi}{n}\right)}{9\sqrt{3}a^5} \left(r \sin 2\beta - a \sin \beta \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \quad (29)$$

$$\tau_{yz} = \frac{80rT \tan^5\left(\frac{\pi}{n}\right)}{9\sqrt{3}a^5} \left(r \cos 2\beta + a \cos \beta \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \quad (30)$$

3.3.3 ค่าความเค้นสูงสุด

ค่าความเค้นสูงสุดบนหน้าตัดใดๆจะเกิดขึ้นที่จุด
บนเส้นขอบหน้าตัดที่ใกล้จุดศูนย์กลางหน้าตัดมาก
ที่สุด [6]

ดังนั้นจุด $r = r_{End}$ และ $\beta = 0^\circ$ จะเป็นจุดที่
ความเค้นของสามเหลี่ยมด้านเท่า (รูปที่ 3) มีค่าสูงสุด
จุดหนึ่ง แทนเงื่อนไขลงใน (29) และ (30) จะได้

$$\tau_{xz} = 0 \quad (31)$$

$$\tau_{yz} = \frac{20 \tan^3\left(\frac{\pi}{n}\right)}{3\sqrt{3}} \left(\frac{T}{a^3} \right) \quad (32)$$

3.3.4 สมการทั่วไปในการหาค่าความเค้นสูงสุด

ถ้าหากตั้งจุดกำเนิดอยู่ที่เซนทรอยด์ของหน้าตัด
และให้แกน x ตั้งฉากกับด้านของรูปหลายเหลี่ยมด้าน
เท่าแล้ว สมการของความเค้นสูงสุดก็คือสมการของ

τ_{yz} ที่ตำแหน่ง $r = r_{End}$ และ $\beta = 0^\circ$

ด้วยเหตุนี้จึงใช้สมการ τ_{yz} ของสามเหลี่ยมด้าน
เท่าที่ตำแหน่งดังกล่าวเป็นสมการฐาน (basis) แล้ว
คูณด้วยเทอมปรับค่าเพื่อให้กลายเป็นสมการทั่วไปใน
การหาค่าความเค้นสูงสุดของแท่งบิดหน้าตัดรูปหลาย
เหลี่ยมด้านเท่า

จากสมการ (32) ทำการแทนค่า n ตั้งแต่ 3 ถึง 10
จะได้ค่าความเค้นดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าความเค้นสูงสุดของแท่งบิดหน้าตัดด้านเท่าเหลี่ยมต่างๆ จากสมการของแท่งบิดหน้าตัดสามเหลี่ยมด้านเท่า

จำนวนเหลี่ยม (n)	ค่าความเค้นสูงสุด (max.)
3	$20 T/a^3$
4	$3.849 T/a^3$
5	$1.47615 T/a^3$
6	$0.740741 T/a^3$
7	$0.429872 T/a^3$
8	$0.27354 T/a^3$
9	$0.185586 T/a^3$
10	$0.132031 T/a^3$

จากงานวิจัยของ K. Lee ซึ่งทำการหาค่าความเค้นสูงสุดด้วยสมการอนุกรมอนันต์ โดยใช้ทอมในการคำนวณ 50,000 เทอม แสดงค่าในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ค่าความเค้นสูงสุดของ K. Lee

จำนวนเหลี่ยม (n)	ค่าความเค้นสูงสุด (max.)
3	$20.10441 T/a^3$
4	$4.80799 T/a^3$
5	$1.98257 T/a^3$
6	$1.02556 T/a^3$
7	$0.60340 T/a^3$
8	$0.38630 T/a^3$
9	$0.26255 T/a^3$
10	$0.18692 T/a^3$

นำค่าความเค้นสูงสุดจากตารางที่ 2 หารด้วยตารางที่ 1 จะได้ค่าดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ค่าจากการหารของสัมประสิทธิ์

n	k = factor
3	1.00522
4	1.24915
5	1.34307
6	1.38451
7	1.40367
8	1.41222
9	1.41471
10	1.41573

นำค่าที่ได้ดังกล่าวไปทำการประมาณค่าเส้นโค้ง (Fitting Curve) ด้วยการวิเคราะห์การถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares)

จะได้ทอมปรับค่าความเค้นซึ่งเป็นฟังก์ชันของจำนวนเหลี่ยมของหน้าตัด ดังนี้

$$1.40947 - \frac{8.22397}{e^n} \quad (33)$$

โดยที่ค่าความเชื่อมั่นของเส้นโค้ง (R-Squared) มีค่า 0.9973

เมื่อนำสมการ (33) ไปคูณเข้ากับสมการ (32) ก็จะได้สมการทั่วไปในการหาค่าความเค้นสูงสุด

$$\tau_{max,RP} = \left(1.40947 - \frac{8.22397}{e^n} \right) \left(\frac{20 \tan^3 \left(\frac{\pi}{n} \right)}{3\sqrt{3}} \right) \left(\frac{T}{a^3} \right) \quad (34)$$

4. ผลการวิเคราะห์

4.1 เปรียบเทียบค่าความเค้นสูงสุดของสมการที่สร้างขึ้นกับค่าจาก K. Lee และ Ugural A. C.

ตารางที่ 4 เปรียบเทียบค่าความเค้นสูงสุดจากสมการที่สร้างขึ้นกับค่าความเค้นสูงสุดจาก K. Lee

n	$\tau_{max,RP} \left(\frac{T}{a^3} \right)$	$\tau_{max,K.Lee} \left(\frac{T}{a^3} \right)$	% error
3	20.0004595	20.10441	0.517053
4	4.84528821	4.80799	- 0.77575
5	1.99879509	1.98257	- 0.81839
6	1.02895165	1.02556	- 0.33071
7	0.60266752	0.6034	0.121392
8	0.38479192	0.3863	0.39039
9	0.26138982	0.26255	0.441888
10	0.18604455	0.18692	0.468354

ตารางที่ 5 เปรียบเทียบค่าความเค้นสูงสุดจากสมการ
ที่สร้างขึ้นกับค่าความเค้นสูงสุดจาก Ugural A. C.

n	$\tau_{max,RP} \left(\times \frac{T}{a^3} \right)$	$\tau_{max,Ugural A.C.} \left(\times \frac{T}{a^3} \right)$	% error
3	20.0004595	20	- 0.0023
4	4.84528821	4.80769231	- 0.78199
6	1.02895165	1.09696551	6.200182

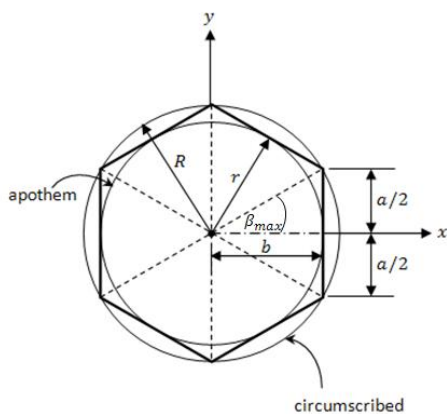
ตารางที่ 6 เปรียบเทียบค่าความเค้นสูงสุดจาก K. Lee
กับค่าความเค้นสูงสุดจาก Ugural A. C.

n	$\tau_{max,K.Lee} \left(\times \frac{T}{a^3} \right)$	$\tau_{max,Ugural A.C.} \left(\times \frac{T}{a^3} \right)$	% error
3	20.10441	20	- 0.52205
4	4.80799	4.80769231	- 0.006192
6	1.02556	1.09696551	6.509367

4.2 ค่าความเค้นสูงสุดจากสมการที่สร้างขึ้น เปรียบเทียบกับค่าความเค้นสูงสุดของสมการการ บิดของเพลากลม

จากสมการ (34) เมื่อค่า n มีค่าเป็นอนันต์ สมการ
(34) ก็จะเข้าใกล้สมการความเค้นสูงสุดของแท่งบิด
หน้าตัดวงกลม

พิจารณาค่าของ a ในสมการ (34) จะมีค่าเข้าสู่
ศูนย์เมื่อจำนวนเหลี่ยม n เข้าสู่ค่าอนันต์ถ้าระยะจาก
เซนทรอยด์ไปตั้งฉากกับด้านของรูปหลายเหลี่ยมมี
ค่าคงที่ อย่งไรก็ตามถ้าพิจารณาความสัมพันธ์
ระหว่างความยาวด้านและรัศมีวงกลมแนบใน
(apothem) จะได้ว่า



รูปที่ 6 วงกลมแนบในของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า

$$a = 2r \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (35)$$

แทนค่า n เป็นค่าอนันต์และสมการ (35) ลงใน
สมการ (34) จะได้ค่าประมาณความเค้นสูงสุดของแท่ง
บิดหน้าตัดวงกลมดังนี้

$$\tau_{max,RP,Circle} = 0.67813125 \left(\frac{T}{r^3} \right) \quad (36)$$

ตารางที่ 7 เปรียบเทียบค่าความเค้นสูงสุดจากสมการ
ที่สร้างขึ้นกับค่าความเค้นสูงสุดจากสมการการบิดของ
เพลากลม

$\tau_{max,RP,Circle} \left(\times \frac{T}{r^3} \right)$	$\tau_{max,Circle} \left(\times \frac{T}{r^3} \right)$	% error
0.67813125	0.63661977	- 6.5

5. วิเคราะห์ผลการวิเคราะห์

ถึงแม้ว่าค่าความเค้นสูงสุดที่ได้จากสมการ (34) ที่
สร้างขึ้นจะมีความแตกต่างจากค่าความเค้นสูงสุดของ
K. Lee ไม่ถึง 1 % แต่มีความแตกต่างจากตำราอ้างอิง
ของ Ugural A. C. อยู่ประมาณ 6 % สำหรับกรณีหก
เหลี่ยมด้านเท่า สำหรับค่าความเค้นสูงสุดของสมการ
K. Lee และ Ugural A. C. นั้นมาจากวิธีการทาง
Numerical โดยใช้รูปแบบของสมการอนุกรมอนันต์ใน
การหาค่าความเค้นสูงสุด ซึ่งความถูกต้องของอนุกรม
อนันต์นั้นขึ้นอยู่กับจำนวนเทอมที่ใช้ในการคำนวณ

เมื่อเปรียบเทียบค่าความเค้นสูงสุดที่ได้จาก K.
Lee กับ Ugural A. C. ก็จะพบความแตกต่างอยู่
ประมาณ 6 % สำหรับกรณีหกเหลี่ยมด้านเท่าเช่นกัน
เป็นไปได้ว่าจำนวนเทอมที่ใช้ในการคำนวณค่าความ
เค้นสูงสุดไม่เท่ากัน ถ้า K. Lee กับ Ugural A. C. ใช้
จำนวนเทอมในการคำนวณเท่ากันแล้วค่าที่ได้อาจจะม
ีความแตกต่างน้อย

อย่างไรก็ตามสมการ (34) ที่สร้างขึ้นนี้สามารถ
นำไปใช้ได้ โดยจะมีค่าความแตกต่างน้อยมาก (ไม่ถึง
1 %) เมื่อเทียบกับสมการของ K. Lee แต่มีจุดเด่น
ตรงที่รูปแบบของสมการอยู่ในสมการทางคณิตศาสตร์
ที่ไม่ซับซ้อน

นอกจากนั้นเมื่อนำสมการ (34) ที่สร้างขึ้นนี้ไป
ประมาณค่าความเค้นสูงสุดของแท่งบิดหน้าตัดวงกลม

ก็จะมีค่าความแตกต่างจากสมการการบิดของเพลากลม อยู่ 6.5 % ค่าความผิดพลาดนี้สาเหตุหลักๆ มาจาก ข้อมูลที่ใช้วิเคราะห์การถดถอยเพื่อหาเทอมปรับค่า ความเค้นมีจำนวนน้อย อย่างไรก็ตามถ้าเพิ่มจำนวน ข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์การถดถอยขึ้นค่าความ แตกต่างนี้น่าจะลดลง

6. สรุป ข้อเสนอแนะ และการวิจัยขั้นต่อไป

สมการ (34) สามารถนำไปใช้หาค่าความเค้น สูงสุดของแท่งบิดหน้าตัดหลายเหลี่ยมด้านเท่า โดยจะ มีความแตกต่างจากสมการความเค้นสูงสุดของ K. Lee ไม่ถึง 1 % แต่มีข้อได้เปรียบในเรื่องของรูปแบบ สมการที่สามารถนำไปใช้งานได้ง่ายกว่า

จากรูปร่างการกระจายความเค้นที่คล้ายคลึงกัน ของสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อยภายในหน้าตัดหลาย เหลี่ยมด้านเท่า ถ้าเราสามารถหาตัวคูณปรับค่ามาคูณ เข้ากับสมการ (29) และ (30) ได้ ก็จะได้สมการทั่วไป ที่สามารถหาค่าความเค้นที่ตำแหน่งใดๆ บนหน้าตัด หลายเหลี่ยมด้านเท่าได้

งานวิจัยขั้นต่อไปจะทำการหาตัวคูณปรับค่า ดังกล่าว ซึ่งน่าจะเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง มุม และ จำนวนเหลี่ยมของหน้าตัด

6. กิตติกรรมประกาศ

บทความนี้ได้รับเงินสนับสนุนจากบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่และภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

7. เอกสารอ้างอิง

7.1 บทความจากวารสาร (Journal)

- [1] Hassenpflug, W. C. (2002). *Torsion of Uniform Bars with Polygon Cross-Section*. South Africa: Department of Mechanical Engineering University of Stellenbosch.
- [2] Kolodziej, J. A., & Fraska, A. (2005). *Elastic torsion of bars possessing regular polygon in cross-section using BMC*. Poland: Institute of Applied Mechanics Poznan University of technology.

[3] Liu, C. S. (2007). *Elastic Torsion Bar with Arbitrary Cross-Section Using the Fredholm Integral Equations* (Vol.5, no.1, pp.31-42, 2007). CMC: Copyright© 2007 Tech Science Press.

[4] Lee, K. (2007). *Torsion of Fibers of an N-sided Regular Polygonal Cross-Section*. South Korea: Division of Fashion and Textiles Dong-A University.

7.2 บทความจากเอกสารประกอบการประชุม (Proceedings)

[5] Seth, B. R. (1934). Torsion of beams whose cross-section is a regular polygon of n sides. *Communicated: White*.

7.3 หนังสือ

- [6] Den Hartog, J. P. (1952). *Advanced Strength of Materials*. New York: McGraw- Hill.
- [7] Wang, C. H. (1953). *Applied Elasticity*. New York: McGraw- Hill.
- [8] Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1970). *Theory of Elasticity* (3rd ed.). New York: McGraw- Hill.
- [9] Volterra, E., & Gaines, J. H. (1971). *Advanced Strength of Materials*. Englewood Cliffs, NJ: PRENTICE-HALL.
- [10] Ugural, A. C., & Fenster, S. K. (1995). *Advanced Strength and Applied Elasticity*. Englewood Cliffs, NJ: PTR Prentice Hall.
- [11] Boresi, A. P., & Schmidt, R. J. (2003). *Advanced Mechanics of Materials* (Sixth Edition). New York: John Wiley & Sons, INC.