

การควบคุมลูกตุ้มหัวกลับสองชั้น ด้วยวิธีการควบคุมกำลังสองเชิงเส้น Balancing of Two-Stage Inverted Pendulum by Linear Quadratic Regulator Method

ภูกิต เบญจเลิศยานนท์^{1*} และ วิทิต ฉัตรรัตนกุลชัย¹

¹ ห้องปฏิบัติการควบคุมหุ่นยนต์และการสัมผัสเทียม (CRVLAB) ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ อ. จตุจักร จ. กรุงเทพฯ 10900
*ผู้ติดต่อ: E-mail tac_m@msn.com, เบอร์โทรศัพท์ 08-9728-7850

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการควบคุมการรักษาเสถียรภาพของระบบลูกตุ้มหัวกลับชนิดสองแกน ซึ่งเป็นระบบที่มีความซับซ้อน ไม่เชิงเส้น และไม่มีเสถียรภาพ โดยใช้วิธีการควบคุมกำลังสองเชิงเส้น ซึ่งเป็นวิธีการหนึ่งในปัญหาการออกแบบแบบเหมาะที่สุด การออกแบบจะทำการกำหนดค่าน้ำหนักเพื่อการออกแบบให้มีประสิทธิภาพของระบบตามที่ต้องการ การออกแบบจะทำการหาสมการทางพลศาสตร์ของระบบและสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการออกแบบตัวควบคุม ผลที่ได้จากการจำลองและการนำไปทดสอบกับระบบจริงพบว่าการควบคุมสามารถให้ผลออกมาได้เป็นที่น่าพอใจ สามารถทนต่อสัญญาณรบกวนที่ให้กับระบบได้ดี ซึ่งสามารถนำไปเป็นแนวทางในการควบคุมระบบที่มีลักษณะใกล้เคียงกันได้

คำหลัก: ลูกตุ้มหัวกลับ, การควบคุมกำลังสองเชิงเส้น, การควบคุมเหมาะที่สุด

Abstract

This paper presents the stabilization control of double inverted pendulum system which is a complicate, nonlinear and unstable system by linear quadratic regulator method which is an extension of optimal control problem. The design will determine the weight to design the desired system performance. Design will make the dynamic equation of the system and create a mathematical model for the controller design. The results obtained from simulation and its actual testing was able to control the output is satisfactory and robust to system's disturbance which can be used as guidelines for the control another similar system.

Keywords: inverted pendulum, linear quadratic regulator, LQR, optimal control

1. บทนำ

ลูกตุ้มหัวกลับเป็นระบบที่ถูกใช้ในการศึกษาระบบควบคุมอย่างแพร่หลาย เนื่องจากเป็นระบบไม่เชิงเส้น และมีคุณสมบัติที่เป็นระบบไม่มีเสถียรภาพ ได้ถูกใช้ในการจำลองพฤติกรรมเคลื่อนที่ในธรรมชาติ เช่น

การจำลองการเดินของหุ่นยนต์สองขา การเคลื่อนที่ของอวกาศยาน เป็นต้น [1-3] การควบคุมระบบลูกตุ้มหัวกลับให้มีผลตอบสนองเป็นที่น่าพอใจนั้นเป็นเรื่องยาก โดยเฉพาะเมื่อระบบมีจำนวนองศาอิสระมากกว่าจำนวนอินพุท (Underactuated system) จึง

ทำให้บ่อยครั้งที่ระบบลูกตุ้มหัวกลับถูกใช้เป็นเกณฑ์เปรียบเทียบสมรรถนะสำหรับวิธีการควบคุมแบบใหม่

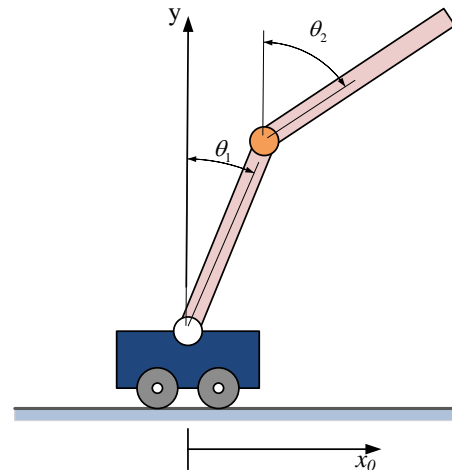
ปัญหาการควบคุมลูกตุ้มหัวกลับได้ถูกแบ่งเป็นปัญหาหลัก ได้แก่ Swing-up control คือการควบคุมตำแหน่งของลูกตุ้มจากจุดสมดุลล่างไปยังตำแหน่งจุดสมดุลบน และ Stabilize control คือการรักษาตำแหน่งของลูกตุ้มที่ตำแหน่งจุดสมดุลบน โดยตัวควบคุมสามารถที่จะรักษาเสถียรภาพของระบบไว้ได้แม้ว่าจะได้รับการรบกวนจากภายนอก และอาจจะมีส่วนของ Mode control สำหรับการควบคุมการเปลี่ยนแปลงการควบคุมของแต่ละปัญหา ซึ่งได้มีผู้ทำการศึกษาการควบคุมลูกตุ้มหัวกลับไว้หลายรูปแบบ ทั้งวิธีเชิงเส้น วิธีไม่เชิงเส้น การควบคุมทันทัน การควบคุมแบบอัจฉริยะ เป็นต้น รวมถึงการดัดแปลงรูปแบบของระบบลูกตุ้มหัวกลับให้มีความซับซ้อนมากขึ้น อย่างไรก็ตามโดยส่วนมากแล้วบทความจะนำเสนอในส่วนของความสำเร็จในการออกแบบระบบควบคุมลูกตุ้มหัวกลับด้วยการจำลองเชิงตัวเลขด้วยคอมพิวเตอร์ [4] ซึ่งในการควบคุมระบบจริงนั้นเป็นเรื่องที่ยากเนื่องด้วยการหาสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ให้แม่นยำสามารถทำได้ยาก และยังมีข้อจำกัดอื่นๆของตัวฮาร์ดแวร์

บทความนี้จะนำเสนอการรักษาเสถียรภาพของระบบลูกตุ้มหัวกลับชนิดสองชั้น ด้วยวิธีการควบคุมแบบ Linear quadratic regulator (LQR) ซึ่งเป็นวิธีการควบคุมแบบเชิงเส้นและต้องอาศัยสมการแบบจำลองคณิตศาสตร์ในการออกแบบ โดยอาศัยการป้อนกลับสถานะของระบบ เพื่อหาในบทความประกอบด้วยส่วนของการสร้างสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ การออกแบบตัวควบคุม จากนั้นจึงนำตัวควบคุมที่ได้ไปการจำลองระบบเชิงตัวเลขเพื่อทดสอบพฤติกรรมที่เกิดขึ้น หลังจากนั้นนำไปทดสอบกับระบบจริงด้วยอุปกรณ์ที่จัดสร้างขึ้น

2. การออกแบบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ระบบลูกตุ้มหัวกลับสองชั้นแสดงได้ดังรูปที่ 1 ระบบจะประกอบด้วยรถที่สามารถเคลื่อนที่ได้ในแนวระดับ ถูกขับเคลื่อนโดยสัญญาณอินพุตผ่านมอเตอร์

กระแสตรง ก้านลูกตุ้มจำนวนสองก้านถูกเชื่อมต่อผ่านจุดหมุนบนตัวรถและที่ปลายของลูกตุ้มทั้งสอง ที่ตำแหน่งมอเตอร์และจุดหมุนได้ติดตั้งตัวรับรู้ในการอ่านค่าตำแหน่งตัวรถและมุมทั้งสอง ในที่นี้ให้ระบบเคลื่อนที่ในแนวระนาบ x-y เท่านั้น



รูปที่ 1 ลูกตุ้มหัวกลับสองชั้น

สมการพลศาสตร์ของระบบสามารถเขียนได้จากสมการลากรางจ์ (Lagrange's equation) [5] คือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

เมื่อ T แทนพลังงานจลน์รวมของระบบ U แทนพลังงานศักย์รวมของระบบ q_i แทน Generalize coordinate i คืออันดับของพิกัด ซึ่งในที่นี้ประกอบด้วย 3 พิกัด ประกอบด้วย x_0 แทนตำแหน่งรถ θ_1 แทนองศาของลูกตุ้มล่าง θ_2 แทนองศาของลูกตุ้ม และ F_i แทน Generalize force สมการการเคลื่อนที่ที่สามารถเขียนได้อยู่ในรูปของสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งรายละเอียดสามารถดูได้จาก [6] เพื่อให้ง่ายต่อการทำไปใช้จึงทำสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปเชิงเส้น โดยให้ระบบทำงานรอบจุดสมดุลบน ($\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0$) โดยแทนค่า $\sin(\theta) = \theta$, $\cos(\theta) = 1$, $\dot{\theta} = 0$ และสมมติให้ ชิ้นส่วนต่างๆเป็นวัตถุแข็งเคลื่อนที่ในระนาบ X-Y เท่านั้น ไม่เกิดการลื่นไถลและการตีเลยของสัญญาณ สมการการเคลื่อนที่ประกอบด้วย

$$\left. \begin{aligned} (m_0 + m_1 + m_2) \ddot{x}_0 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \ddot{\theta}_1 \\ + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 = F - c_0 \dot{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} (m_1 l_1 + m_2 L_1) \ddot{x}_0 + (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + J_1) \ddot{\theta}_1 \\ + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_2 = -c_1 \dot{\theta}_1 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} m_2 l_2 \ddot{x}_0 + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2^2 + J_2) \ddot{\theta}_2 \\ = -c_2 \dot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ค่าพารามิเตอร์ต่างของระบบได้จากการวัดและการทำ System identification โดยความหมายและค่าต่าง ๆ เป็นไปตามตารางที่ 1 และ ตารางที่ 2

เมื่อกำหนดเวกเตอร์สถานะตามพิกัดต่าง ๆ ของ ลูกตุ้มคือ

$$x(t) = [x_0 \quad \dot{x}_0 \quad \theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2]^T$$

จาก (2)-(4) ระบบสามารถเขียนแบบจำลองเชิงเส้นในรูปของปริภูมิสถานะได้ คือ

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5)$$

$$y = Cx \quad (6)$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -167.42 & -4.72 & 0.00 & 0.34 & -0.00 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 660.16 & 90.93 & -0.07 & -34.97 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -71.22 & -52.46 & 0.04 & 46.43 & -0.02 \end{bmatrix}$$

$$B = [0 \quad 25.67 \quad 0 \quad -101.21 \quad 0 \quad 10.92]^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ระบบดังกล่าวมีคุณสมบัติควบคุมได้ และคุณสมบัติสังเกตได้ สมการปริภูมิสถานะ (5) และ (6) จะถูกใช้สำหรับการออกแบบตัวควบคุมต่อไป

3. การออกแบบตัวควบคุมกำลังสองเชิงเส้น

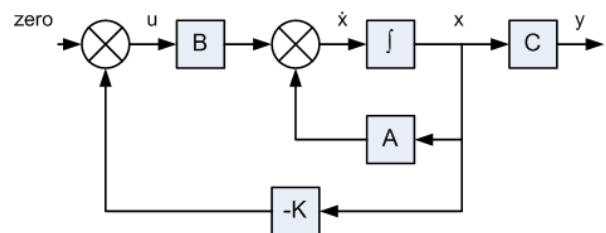
Linear quadratic regulator (LQR) เป็นวิธีการควบคุมโดยการป้อนกลับสถานะ ซึ่งมีโครงสร้างดังรูปที่ 2 [7] เป้าหมายของการออกแบบคือการหาสัญญาณอินพุต u ที่ทำให้ดัชนีสมรรถนะมีค่าน้อยที่สุด คือ

ตารางที่ 1 คำอธิบายสัญลักษณ์

สัญลักษณ์	คำอธิบาย
m_0, m_1, m_2	มวล
L_1, L_2	ความยาวก้านลูกตุ้ม
l_1, l_2	ระยะจากจุดหมุนถึง C.G.
c_0, c_1, c_2	สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน
J_1, J_2	โมเมนต์ความเฉื่อย
ตัวห้อย 0 หมายถึงรถ 1 หมายถึง ก้านลูกตุ้มล่าง และ 2 หมายถึง ก้านลูกตุ้มบน	

ตารางที่ 2 พารามิเตอร์ต่าง ๆ ของระบบ

สัญลักษณ์	ปริมาณ
m_0	0.5 kg
m_1	0.3 kg
m_2	0.3 kg
L_1	0.3 m
L_2	0.6 m
l_1	0.15 m
l_2	0.3 m
c_0	0.1 N·s/m
c_1	0.0011 N·s/m
c_2	0.0004 N·s/m
J_1	0.0034 kg·m ²
J_2	0.0117 kg·m ²



รูปที่ 2 แผนภาพแสดงการควบคุมป้อนกลับรักษาเสถียรภาพ

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (7)$$

เมื่อ $Q \geq 0$ แทนค่าน้ำหนักตัวแปรสถานะ $R > 0$ แทนค่าน้ำหนักของสัญญาณอินพุท เนื่องจากปัญหาการควบคุมลูกตุ้มหัวกลับเป็นปัญหา stabilization control สำหรับระบบ LTI สัญญาณอินพุทที่ต้องการคือ

$$u(t) = -Kx(t) \quad (8)$$

จาก (5) และ (8) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (9)$$

ดังนั้น

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt$$

กำหนดให้ $x^T (Q + K^T R K) x = -\frac{d}{dt} (x^T P x)$

(7) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$J = -x^T P x \Big|_0^{\infty}$$

$$J = -x^T (\infty) P x (\infty) + x^T (0) P x (0)$$

โดยที่ P เป็นไปตามสมการ Algebraic Riccati Equation (10) คือ

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (10)$$

อัตราขยายได้จาก

$$K^T = R^{-1}B^T P \quad (11)$$

จาก (8) และ (11) ค่าสัญญาณอินพุทจากปัญหาที่เหมาะสมที่สุดคือ

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T P x(t) \quad (12)$$

จากสมการที่กล่าวมาพฤติกรรมของระบบจึงอาศัยการเลือกค่าน้ำหนัก Q และ R เพื่อแก้ปัญหาที่เหมาะสมที่สุดของระบบ

4. การจำลองระบบเชิงตัวเลข

การจำลองด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในบทความนี้ทำการทดสอบหาผลตอบสนองต่อสภาวะเริ่มต้น

$$x = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0]^T \quad (13)$$

การจำลองระบบจะทำการจำลองบนโปรแกรม Matlab โดยเลือกใช้ Q และ R เป็นเมทริกซ์ diagonal คือ

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$R = [1000]$$

จากการคำนวณ สามารถหาค่าอัตราขยาย K ได้คือ

$$K = [1 \ 0.72 \ -42.44 \ 1.51 \ 89.93 \ 15.16]$$

ผลการจำลองแสดงได้ดังรูปที่ 3 โดยที่

x_1 แทน ระยะการเคลื่อนที่ของรถ (x_0)

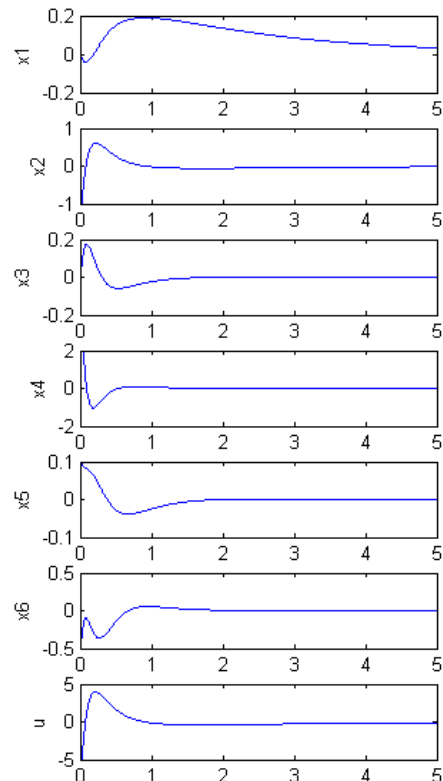
x_2 แทน ความเร็วของรถ (\dot{x}_0)

x_3 แทน มุมเคลื่อนที่ของลูกตุ้มล่าง (θ_1)

x_4 แทน ความเร็วเชิงมุมของลูกตุ้มล่าง ($\dot{\theta}_1$)

x_5 แทน มุมเคลื่อนที่ของลูกตุ้มบน (θ_2)

x_6 แทน ความเร็วเชิงมุมของลูกตุ้มบน ($\dot{\theta}_2$)



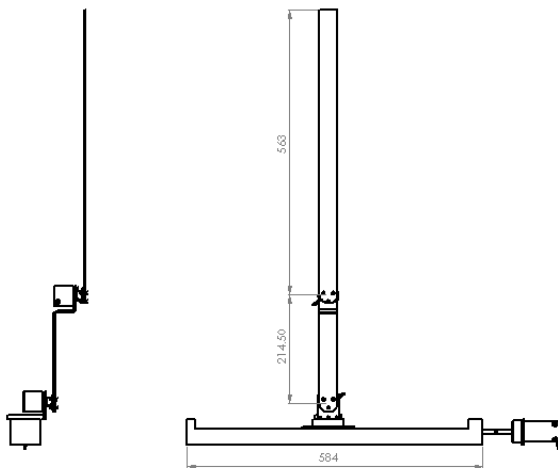
รูปที่ 3 ผลที่ได้จากการจำลองระบบด้วยซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์

5. การทดสอบกับระบบจริง

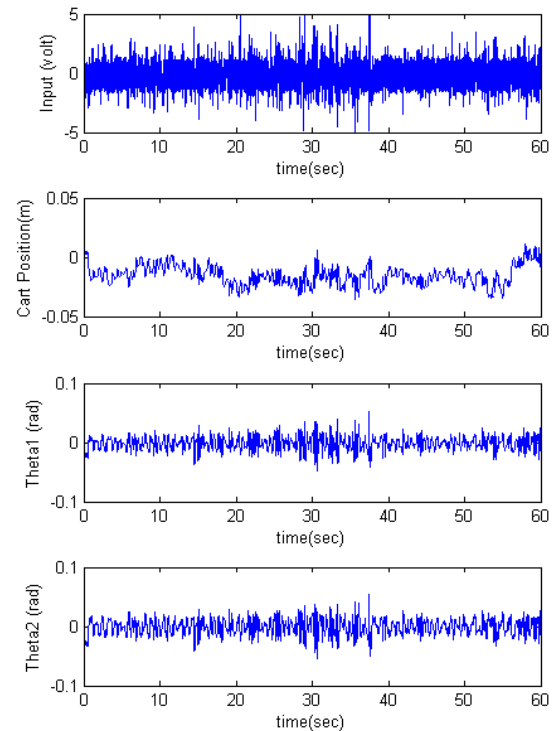
สำหรับการทดลองการควบคุมระบบลูกตุ้มหัวกลับจริงด้วยตัวควบคุม LQR นั้นได้ทำการจัดสร้างระบบลูกตุ้มหัวกลับขึ้นภายในห้องปฏิบัติการการควบคุมหุ่นยนต์และการสั่นสะเทือน (CRVLAB) มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ดังรูปที่ 4 รถถูกควบคุมผ่านอุปกรณ์ Monocarier ขับเคลื่อนด้วยมอเตอร์กระแสตรง ควบคุมด้วยซอฟต์แวร์ ณ NI Labview Real-Time บน Target Computer และใช้ NI Labview ในการออกแบบการควบคุมบน Host Computer

การทดลองจะทำการรักษาเสถียรภาพไว้ที่จุดสมดุลบนโดยเป้าหมายต้องการรักษาตำแหน่งของตัวรถ ก้านลูกตุ้มทั้งสอง โดยให้เกิดการเคลื่อนที่น้อย ในขณะที่สามารถรับแรงที่เกิดจากการรบกวนได้ ซึ่งการทดลองจะทำการเคาะบริเวณต่างๆของลูกตุ้ม นอกจากนี้ในการทดลองจริงได้ทำการเพิ่มตัวอินทิกรัลในส่วนของการควบคุม (รูปที่ 1)

ผลจากการควบคุมโดยใช้ตัวควบคุมที่ได้ออกแบบเมื่อไม่มีตัวอินทิกรัลได้ผลดังรูปที่ 5



รูปที่ 4 แบบจำลองระบบลูกตุ้มหัวกลับที่ได้สร้างขึ้นเพื่อทำการทดลองภายในห้องปฏิบัติการ CRVLAB



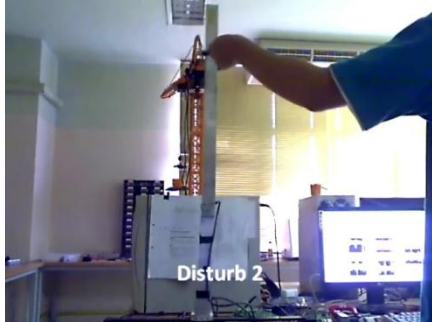
รูปที่ 5 ผลที่ได้จากการทดสอบการรักษาเสถียรภาพของลูกตุ้มหัวกลับ ไม่มีตัวอินทิกรัล

จาก รูปที่ 5 ระบบสามารถรักษาเสถียรภาพที่จุดสมดุลได้เป็นอย่างดีโดยที่สภาวะปกติตัวรถมีการช่วงการเคลื่อนที่ประมาณ 3 เซนติเมตร มุมของลูกตุ้มทั้งสองมีช่วงเคลื่อนที่ที่ประมาณ 0.03 และ 0.02 เรเดียนตามลำดับ

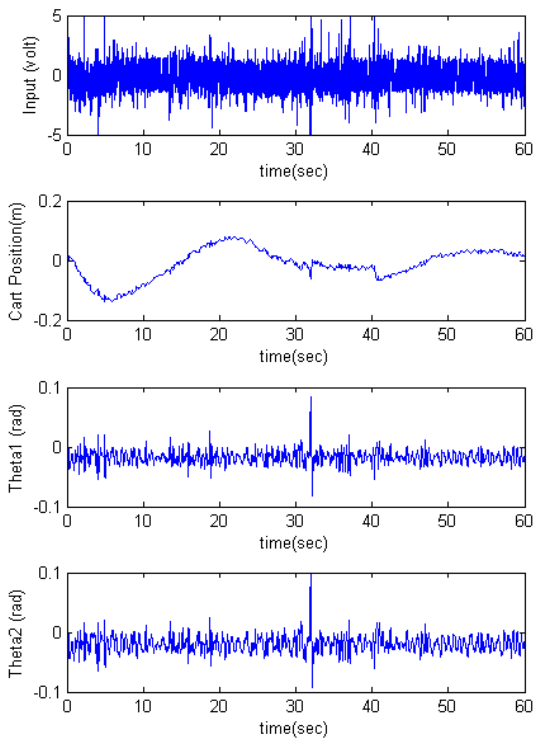
อย่างไรก็ตามพบว่าตัวรถไม่ได้รับการรักษาเสถียรภาพที่ตำแหน่งศูนย์ซึ่งเกิดจากการที่ติดตั้งตัวตรวจรู้เข้าไปในระบบทำให้น้ำหนักที่เพิ่มขึ้นจากสายไฟต่างๆทำให้จุดสมดุลของลูกตุ้มเปลี่ยนไปส่งผลต่อตำแหน่งของรถซึ่งทำการแก้ปัญหาโดยการทำการเพิ่มตัวอินทิกรัลเข้าไปในระบบ ผลที่ได้จากการควบคุมเป็นไปตามรูปที่ 7 รถสามารถเข้าสู่ตำแหน่งที่ต้องการเมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่งได้ดีขึ้น ซึ่งช่วยลดปัญหาเนื่องจากความไม่แม่นยำของสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในส่วน of ตำแหน่งตัวรถได้

จากรูปที่ 7 การทดลองยังได้ทำการรบกวนระบบโดยในช่วงเวลาวินาทีที่ 30 ได้ทำการรบกวนลูกตุ้มล่าง และ วินาทีที่ 40 สำหรับลูกตุ้มบน โดยทำการ

เคาะบริเวณปลายของก้านลูกตุ้มตั้งรูปที่ 6 แสดงให้เห็นว่าระบบยังสามารถรักษาเสถียรภาพและเคลื่อนที่เข้าสู่ตำแหน่งสมสมดุลได้รวดเร็ว



รูปที่ 6 การรบกวนลูกตุ้ม



รูปที่ 7 ผลที่ได้จากการทดสอบการรักษาเสถียรภาพของลูกตุ้มหัวกลับ มีตัวอินทิกรัล และทำการรบกวนที่ลูกตุ้มล่างที่วินาทีที่ 30 และ ลูกตุ้มบนที่วินาทีที่ 40

6. สรุป

การควบคุมระบบลูกตุ้มหัวกลับสองแกนเป็นปัญหาการควบคุมที่มี 3 องศาอิสระ การควบคุมเอาต์พุตที่เกี่ยวข้องเนื่องกันจึงต้องอาศัยตัวควบคุมที่แม่นยำ การเลือกสถานะของระบบ ความแม่นยำของ

ตัวแปรต่างๆ มีผลอย่างมากต่อความสำเร็จในการรักษาเสถียรภาพของระบบซึ่งเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ

การออกแบบด้วยวิธีคุ่มค่ากำลังสองเชิงเส้น เป็นการออกแบบในโดเมนเวลา โดยทำการออกแบบเพื่อให้ดัชนีสมรรถนะน้อยที่สุด ซึ่งดัชนีสมรรถนะอยู่ในรูปสมการของสถานะและอินพุตโดยมีค่าน้ำหนัก Q และ R เป็นตัวกำหนดลักษณะเป็นไปของระบบ กรณีเมทริกซ์ Q มีค่ามากๆ คือการให้ความสำคัญค่าผิดพลาดของสถานะอ้างอิงและสถานะเอาต์พุต ซึ่งผลคือจะทำให้ระบบตอบสนองได้ดีและรวดเร็ว ส่วนในกรณีเมทริกซ์ R มีค่ามากคือการให้ความสำคัญในส่วน of พลังงานที่ใช้ในการควบคุม จากการทดลองค่า Q และ R ให้ผลการทดลองเป็นที่น่าพอใจเนื่องจากใช้พลังงานของสัญญาณควบคุมต่ำ และสามารถทนต่อสิ่งรบกวนได้ ซึ่งกรณีที่ใช้สัญญาณควบคุมมากๆ แม้ว่าจะทนต่อสิ่งรบกวนได้ดีกว่า แต่ก็จะมีโอกาสสูงที่สัญญาณควบคุมจะเกินค่าขอบเขตที่อุปกรณ์จะรับได้ ทำให้การควบคุมผิดพลาดจนไม่สามารถรักษาตำแหน่งได้ ส่วนการเพิ่มตัวอินทิกรัลที่เหมาะสมเข้าไประบบช่วยให้การควบคุมตำแหน่งสามารถเข้าสู่ตำแหน่งที่ต้องการได้รวดเร็วขึ้น

7. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ในการสนับสนุนการทำวิจัย และขอขอบคุณคณาจารย์ผู้ทรงคุณวุฒิ และผู้ที่เกี่ยวข้องทุกท่าน ที่ได้ให้คำแนะนำเกี่ยวกับงานวิจัย

8. เอกสารอ้างอิง

[1] Kajita, S., Kanehiro, F., Kaneko, K., Fujiwara, K., Yokoi, K. and Hirukawa, H. (2001). The 3D linear inverted pendulum mode: a simple modeling for a biped walking pattern generation, paper presented in *Proceedings of the 2001*

IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and System, Hawaii, USA.

[2] Wane, S.O., Yu, H. and Liu, Y. (2007). Development of a reaction drive for a propulsion mechanism. paper presented in *IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*, 15-17 April 2007, London, UK.

[3] ชิต เหล่าวัฒนา, ฐิติศักดิ์ จันทร์พรหม และ ไพศาล สุวรรณเทพ. (2545). การวิเคราะห์โครงสร้างทางกลและเสถียรภาพของหุ่นยนต์เดินสองขา, *วารสารวิจัยและพัฒนา มจร.*, 25 (1), หน้า 35 - 54.

[4] Hu Lingyan, Liu Guoping, Liu Xiaoping, Zhang Hua (2009). The Computer Simulation and Real-Time Stabilization Control for the Inverted Pendulum System Based on LQR, *Natural Computation, 2009. ICNC '09. Fifth International Conference on* , vol.6, no., pp.438-442, 14-16 Aug. 2009.

[5] Thomson, W.T. and Dahleh, M.D. (1998). *Theory of Vibration with Applications 5th ed.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA.

[6] ฐกัต เบญจเลิศยานนท์ (2553). การควบคุมลูกตุ้มนาฬิกาหัวกลับสองแกนด้วยวิธีการควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด, *บัณฑิตวิทยาจารย์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.*

[7] Ogata, K. (2002). *Modern Control Engineering, 4 ed.*, Prentice Hall, New Jersey.