วิธีเมชเลส : อนาคตของการคำนวณเชิงวิศวกรรมศาสตร์

Meshless Methods : Future of Engineering Computations

สมชาติ ฉันทศิริวรรณ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต
อ. คลองหลวง จ. ปทุมธานี 12121
โทร 0-25643001 ต่อ 3145 โทรสาร 0-25643010 E-mail: somchart@engr.tu.ac.th

Somchart Chantasiriwan
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Thammasat University, Rangsit Campus
Khlong Luang, Pathum Thani 12121
Tel: 0-25643001 Ext. 3145 Fax: 0-25643010 E-mail: somchart@engr.tu.ac.th

บทคัดย่อ

ในช่วงสามทศวรรษที่ผ่านมา วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลาย แต่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ไม่ได้มีความสมบูรณ์ในทุกด้าน ข้อเสียเปรียบที่สำคัญของวิธีนี้คือ การที่วิธีนี้ทำงานโดยอาศัยเมชหรือเครือข่ายของชิ้นประกอบจำนวนมากภายในโดเมนของปัญหา ซึ่งขั้นตอนการสร้างเมชมักใช้เวลานาน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของปัญหาสามมิติ ในช่วง 10 ปีที่ผ่านมาจึงได้มีความพยายามที่จะคิดค้นวิธีเชิงตัวเลขที่สามารถทำงานได้โดยไม่ต้องอาศัยเมช วิธีที่ทำงานตามลักษณะนี้มีหลายวิธีและเรียกรวมกันว่าวิธีเมชเลส บทความนี้จะเป็นการสรุปหลักการทำงานของวิธีเมชเลสหลายวิธี และนำเสนอ Differential Quadrature Method ซึ่งเป็นวิธีเมชเลซที่มีประสิทธิภาพและใช้งานง่าย จากการเปรียบเทียบการทำงานของวิธีนี้กับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่า Differential Quadrature Method มีศักยภาพพอที่จะเป็นทางเลือกใหม่ของการคำนวณเชิงวิศวกรรมศาสตร์ในอนาคต และศักยภาพนี้น่าจะมีอยู่ในวิธีเมชเลสอีกหลายวิธี

Abstract

During the past three decades, finite element method has gained widespread acceptance. But this method is not without flaws. Its main disadvantage is its dependence on mesh or a network of elements within the problem domain. Mesh generation is usually time-consuming, especially for three-dimensional problems. During the past 10 years, there have been attempts to devise new numerical methods that can work without mesh. These methods are collectively called meshless methods. This article reviews briefly the principles of several meshless methods, and presents Differential Quadrature Method, which is efficient and easy to use. Comparison of this method with finite element method reveals that this method has the potential to be an alternative for future engineering computations. This potential is probably possessed by several other meshless methods.

1. บทนำ

วิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับการยอมรับมากที่สุดในปัจจุบันคือ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ ทั้งสองวิธีได้รับการพิสูจน์แล้วว่าสามารถแก้ปัญหาที่บรรยายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์มากมายหลายปัญหา วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์อาจเสียเปรียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตรงที่ไม่สามารถจัดการกับโดเมนที่มีรูปร่างซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ แต่ก็มีข้อได้เปรียบที่เข้าใจง่าย และมีความยืดหยุ่นสูงซึ่งทำให้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์มีความเหมาะสมกับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นที่ซับซ้อน อย่างไรก็ตามทั้งสองวิธีได้รับความนิยมไม่ต่างกันมากนักในการแก้ปัญหาไม่เชิงเส้นของพลศาสตร์ของไหลและกลศาสตร์ของแข็ง

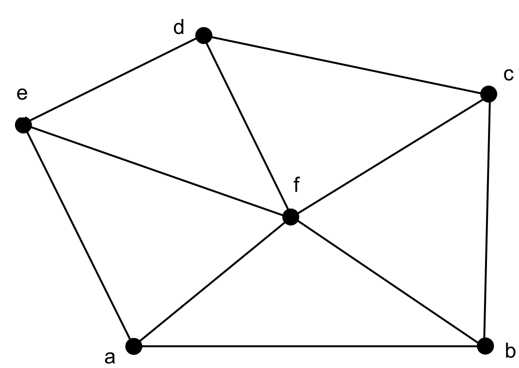
สิ่งหนึ่งที่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์เหมือนกันคือ ทั้งสองวิธีต้องมีขั้นตอนเตรียมข้อมูล (preprocessing) ซึ่งต้องมีการสร้างเมช (mesh) หรือเครือข่ายของชิ้นประกอบ (element) ภายในโดเมนก่อนถึงขั้นตอนการหาผลเฉลย (solution) และขั้นตอนการประมวลข้อมูล (post-processing) ตามลำดับ เมชของโดเมนที่มีรูปทรงง่าย ๆ เช่น วงกลม สี่เหลี่ยม ลูกบาศก์ สามารถสร้างได้ง่ายด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์สั้น ๆ แต่ปัญหาโดยทั่วไปมีโดเมนที่ซับซ้อน การสร้างเมชสำหรับวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์อาจต้องอาศัยพิกัดแนบกับขอบเขต (boundary-fitted oordinates) ในขณะที่เมชสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อาจเป็นเมชที่ไม่เป็นระเบียบ (unstructured mesh) ซึ่งนับเป็นข้อได้เปรียบของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ทำให้วิธีนี้มีความยืดหยุ่นสูงในการแก้

ปัญหาที่มีโดเมนซับซ้อน อย่างไรก็ตามทั้งเทคนิคการสร้างพิกัดแนบกับขอบเขต และเทคนิคการสร้างเมชที่เป็นระเบียบต่างก็ไม่ง่ายในการทำความเข้าใจและนำไปใช้งาน ขั้นตอนเตรียมข้อมูลจึงเป็นขั้นตอนที่ใช้เวลานานและทำให้เกิดข้อจำกัดในการเพิ่มประสิทธิภาพของวิธีทั้งสองในการแก้ปัญหาที่มีโดเมนซับซ้อน

ในความพยายามพัฒนาวิธีเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพสูง นอกจากจะมีการศึกษาและวิจัยการทำให้ขั้นตอนการเตรียมข้อมูลของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ง่ายขึ้นแล้ว ยังได้มีการศึกษาและวิจัยเพื่อหาวิธีเชิงตัวเลขใหม่ ๆ ที่ทำงานได้โดยไม่ต้องมีการสร้างเมชในขั้นตอนการเตรียมข้อมูล วิธีเหล่านี้เรียกรวม ๆ กันว่าวิธีเมชเลส (meshless methods) บทความจะสำรวจและสรุปวิธีเมชเลสที่สำคัญที่ได้มีการนำเสนอและทดสอบ นอกจากนี้ Differential Quadrature Method ซึ่งเป็นวิธีเมชเลสวิธีหนึ่งจะถูกเปรียบเทียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อวิเคราะห์ข้อได้เปรียบและเสียเปรียบ ซึ่งผลการเปรียบเทียบจะแสดงให้เห็นว่ามีแนวโน้มที่วิธีเมชเลสจะได้รับความนิยมและมีความสำคัญมากขึ้นในอนาคต

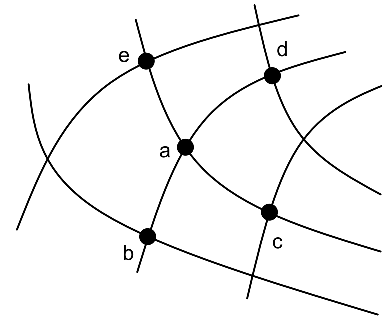
2. หลักการพื้นฐานของวิธีเชิงตัวเลข

การหาผลเฉลี่ยโดยประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธีเชิงตัวเลขมีหลักการทำงานคล้ายกันคือ สมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตจะถูกแปลงเป็นระบบสมการพีชคณิตที่มีผลเฉลยเป็นค่าของตัวแปรที่บัพ (node) ต่าง ๆ ภายในโดเมนและบนขอบเขต ซึ่งตำแหน่งของบัพจะถูกกำหนดในขั้นตอนการเตรียมข้อมูล สิ่งที่ทำให้วิธีเชิงตัวเลขต่างกันคือ ขั้นตอนการสร้างระบบสมการพีชคณิตซึ่งประกอบด้วย (1) การกำหนดความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (functional relationship) ระหว่างตัวแปรที่ตำแหน่งใด ๆ ภายในโดเมนหรือบนขอบเขตกับตัวแปรที่บัพจำนวนหนึ่งซึ่งอยู่ใกล้ตำแหน่งนั้น ๆ และ (2) การสร้างระบบสมการพีชคณิตจากสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขต



รูปที่ 1 เมชที่ไม่เป็นระเบียบในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ในกรณีของกริดไม่เป็นระเบียบในรูปที่ 1 ฟังก์ชันความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรภายในชิ้นประกอบสามเหลี่ยม abf และตัวแปรที่ตำแหน่ง a, b และ f เป็นฟังก์ชันพหุนามสองตัวแปรอันดับหนึ่ง (first-order two-variable polynomial function) ซึ่งความสัมพันธ์นี้ทำให้อนุพันธ์ของตัวแปรที่ตำแหน่ง f ขึ้นกับตัวแปรที่ตำแหน่ง a, b, c, d, e และ f ในทำนองเดียวกันตัวแปรที่ตำแหน่ง a ของกริดเป็นระเบียบในรูปที่ 2 ขึ้นกับตัวแปรที่ตำแหน่ง b, c, d และ e



รูปที่ 2 เมชที่เป็นระเบียบในวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

สมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้สร้างระบบสมการพีชคณิตอาจอยู่ในรูปเข้ม (strong form) หรือรูปอ่อน (weak form) ก็ได้ วิธีสร้างระบบสมการพีชคณิตจากสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตในรูปเข้มเป็นที่รู้จักในชื่อ วิธีกำหนดตำแหน่งจุด (point collocation method) ส่วนวิธีสร้างระบบสมการพีชคณิตจากสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตในรูปอ่อนมีหลายวิธี แต่วิธีที่ได้รับความนิยมมากที่สุดคือ วิธีกาเลอร์กิน (Galerkin method) ซึ่งวิธีนี้นิยมใช้ในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นที่น่าสังเกตว่า วิธีกาเลอร์กินดังกล่าวอาจเรียกให้ระบุให้เจาะจงว่าเป็น วิธีกาเลอร์กินครอบคลุม (global Galerkin method) เนื่องจากปริพันธ์ที่ได้จากวิธีนี้เป็นปริพันธ์ที่ครอบคลุมโดเมนทั้งหมด การหาค่าปริพันธ์ตามวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อให้ได้มาซึ่งระบบสมการพีชคณิตต้องอาศัยการแบ่งปริพันธ์นี้เป็นปริพันธ์ย่อยหลายปริพันธ์โดยแต่ละปริพันธ์เป็นปริพันธ์สำหรับแต่ละชิ้นประกอบ ดังนั้นชิ้นประกอบจึงต้องไม่ทับซ้อนกัน

3. วิธีเมชเลส

เมชคือเครือข่ายของชิ้นประกอบที่ไม่ทับซ้อนกันและต่อกันเป็นโดเมน การสร้างเมชเป็นกระบวนการที่ใช้เวลานานในขั้นตอนเตรียมข้อมูลโดยเฉพาะอย่างยิ่งในปัญหาสามมิติ นอกจากนี้ถ้าเมชมีการเปลี่ยนรูปดังเช่นในปัญหาไม่อยู่ตัวที่โดเมนเปลี่ยนรูปร่างตามเวลา การสร้างเมชก็ยิ่งจะทำให้ประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาลดลงไปอีก ดังนั้นวิธีเชิงตัวเลขที่สามารถทำงานโดยไม่อาศัยเมชดังเช่น วิธีเมชเลสจึงน่าจะทำงานอย่างมีประสิทธิภาพในปัญหาที่สร้างความยุ่งยากให้แก่วิธีที่ต้องอาศัยเมช

ในช่วงสิบกว่าปีที่ผ่านมาได้มีผู้เสนอวิธีเมชเลสเอาไว้หลายวิธี แต่ละวิธีแตกต่างกันในขั้นตอนการกำหนดความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปร และการสร้างระบบสมการพีชคณิตจากสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขต ต่อไปนี้เป็นรายละเอียดของขั้นตอนทั้งสอง

3.1 ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปร

สิ่งหนึ่งที่ทำให้วิธีเมชเลสไม่ต้องการชิ้นประกอบคือ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปรที่ตำแหน่งใด ๆ กับตัวแปรอื่น ๆ สามารถ

สร้างขึ้นมาได้โดยไม่ต้องสร้างชิ้นประกอบขึ้นมาก่อนเฉกเช่นวิธีไฟไนต์เอลิ-เมนต์ ตัวแปรที่มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างกันมักถูกกำหนดให้เป็นกลุ่มตัวแปรที่อยู่ใกล้กัน ซึ่งจะทำให้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการพีชคณิตที่ได้เป็นเมทริกซ์มากเลขศูนย์ (sparse matrix) ที่มีลักษณะเป็นเมทริกซ์แถบ (band matrix)

กำหนดให้โดเมนที่ต้องการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปรมี n บัพโดยแต่ละบัพอยู่ที่พิกัด (x_i, y_i) (i = 1, 2, …, n) สำหรับปัญหาสองมิติ หรือพิกัด (x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, …, n) สำหรับปัญหาสามมิติ ค่าตัวแปร u^h ที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ ภายในโดเมนอาจประมาณได้ดังนี้

$$u^h = \sum_{i=1}^{m} p_i(\vec{r})a_i \tag{1}$$

โดยที่ p_1, p_2, …, p_m เป็นฟังก์ชันฐาน (basis function) ที่เป็นอิสระต่อกัน และ a_i เป็นสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน ฟังก์ชันฐานอาจเป็นฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ในกรณีของปัญหาสองมิติ m อาจเท่ากับ 3 และ (p_1, p_2, p_3) = (1, x, y) ในกรณีของปัญหาสามมิติ m อาจเท่ากับ 4 และ (p_1, p_2, p_3, p_4) = (1, x, y, z) จำนวนฟังก์ชันฐานอาจมากขึ้นเพื่อเพิ่มความแม่นยำของการประมาณค่า u^h สัมประสิทธิ์ a_i หาได้โดยกำหนดให้ u^h เท่ากับค่าตัวแปร u_i ที่ทุก ๆ บัพ ผลที่ตามมาคือสมการเมทริกซ์

$$\vec{u} = \boldsymbol{P}\vec{a} \tag{2}$$

$$\vec{a} = \boldsymbol{P}^{-1}\vec{u} \tag{3}$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ a_i กลับลงในสมการ (1)

$$u^h = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} p_i(\vec{r})P_{ij}^{-1}\right)u_j \tag{4}$$

เป็นที่น่าสังเกตว่า n = m เนื่องจาก $\boldsymbol{P}$ ต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัสจึงจะหาเมทริกซ์ผกผัน $\boldsymbol{P}^{-1}$ ได้ ตัวอย่างของวิธีเมชเลสที่ใช้ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปรลักษณะนี้ได้แก่ Generalized Finite Difference Method [1] and Point Interpolation Method [2]

ถ้าจำนวนบัพ n มากกว่าจำนวนฟังก์ชันฐาน m การหาค่าสัมประสิทธิ์ a_i ในสมการ (1) สามารถกระทำได้โดยหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน J ต่อไปนี้

$$J = \sum_{j=1}^{n} w(\vec{r}-\vec{r}_j)\left(\sum_{i=1}^{m} p_i(\vec{r}_j)a_i(\vec{r}) - u_j\right)^2 \tag{5}$$

โดย w เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weighting function) วิธีสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปรวิธีนี้เรียกว่า วิธี Moving Least Square เป็นที่น่าสังเกตว่า a_i ไม่ใช่ค่าคงที่ แต่จะเปลี่ยนค่าไปตามพิกัดของ $\vec{r}$ วิธีเมชเลสที่ใช้ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปรลักษณะนี้ได้แก่ Element-free Galerkin Method [3], Local Meshless Petrov-Galerkin Method [4]

นอกจากฟังก์ชันพหุนามแล้ว ฟังก์ชันฐานอาจเป็นฟังก์ชันฐานเชิงรัศมี (radial basis function) ค่าประมาณของตัวแปร u^h ที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ ภายในโดเมนอาจเขียนใหม่เป็น

$$u^h = \sum_{i=1}^{m} f(\vec{r}-\vec{r}_i)a_i \tag{6}$$

ฟังก์ชันฐานเชิงรัศมีขึ้นกับระยะห่างระหว่าง $\vec{r}$ กับ $\vec{r}_i$ เท่านั้น ข้อได้เปรียบของฟังก์ชันฐานเชิงรัศมีเหนือฟังก์ชันฐานพหุนามคือ ฟังก์ชันฐานที่เป็นอิสระต่อกันสามารถสร้างขึ้นได้ง่าย และไม่ซับซ้อนขึ้นเมื่อจำนวนฟังก์ชันฐานเพิ่มขึ้น รูปฟังก์ชัน f แสดงให้เห็นว่าจำนวนฟังก์ชันฐาน m จะเท่ากับจำนวนบัพ n เสมอ การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ด้วยฟังก์ชันฐานเชิงรัศมีอาจกระทำโดยให้ n เป็นจำนวนบัพทั้งหมดในโดเมนดังเช่นใน Kansa's Method [5] และ Method of Fundamental Solutions [6] หรืออาจแบ่งโดเมนใหญ่เป็นโดเมนย่อยที่อาจทับซ้อนกันได้และให้ n เป็นจำนวนบัพในโดเมนย่อยดังเช่นใน Differential Quadrature Method [7]

อีกแนวทางหนึ่งในการสร้างความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปรคือ ประมาณค่า u^h ในโดเมนย่อย Ω ในรูปปริพันธ์

$$u^h(\vec{r}) = \int_{\Omega} w(\vec{r}_i-\vec{r})u(\vec{r})d\vec{r} \tag{7}$$

ซึ่งสามารถแปลงเป็นความสัมพันธ์เชิงพีชคณิตโดยอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical integration)

$$u^h = \sum_{j=1}^{n} w(\vec{r}-\vec{r}_j)u_j\Delta V \tag{8}$$

โดยที่ ΔV เป็นพื้นที่หรือปริมาตรของโดเมนย่อย Ω การประมาณค่าลักษณะนี้ถูกใช้ใน Smooth Particle Hydrodynamics Method [8] และ Reproducing Kernel Particle Methods [9]

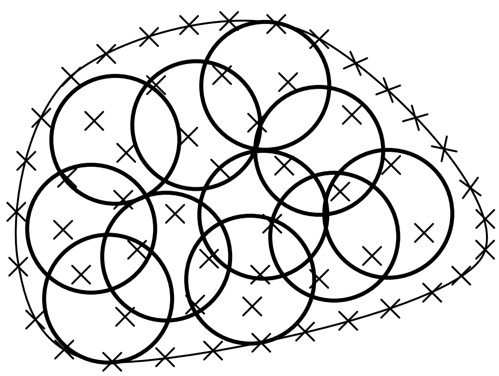
3.2 การสร้างระบบสมการพีชคณิต

การสร้างระบบสมการพีชคณิตจากสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตในรูปดั้งเดิมหรือรูปเข้ม เป็นวิธีที่ใช้ในวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์และวิธีเมชเลสหลายวิธีเช่น Generalized Finite Difference Method [1], Kansa's Method [5], Method of Fundamental Solutions [6] และ Differential Quadrature Method [7] สิ่งหนึ่งที่วิธีเมชเลสเหล่านี้เหมือนกันคือ อนุพันธ์ย่อย (partial derivative) ในอันดับที่สูงที่สุดที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันฐานอย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชันจะต้องมีค่าไม่เป็นศูนย์ ตัวอย่างเช่นในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์พาราโบลิกสองมิติซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยอันดับสองด้วย Differential Quadrature Method ฟังก์ชันฐานพหุนาม 1, x และ y ไม่เพียงพอเพราะอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชันฐานทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์ ฟังก์ชันฐานที่ควรเพิ่มเข้าไปคือ x^2, xy และ y^2

การสร้างระบบสมการพีชคณิตอีกรูปแบบได้จากการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตเป็นสมการเชิงปริพันธ์หรือรูปอ่อน

ก่อนใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขสร้างระบบสมการพีชคณิต โดเมนของปริพันธ์อาจเป็นโดเมนของปัญหาดังเช่นในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งวิธีนี้แบ่งโดเมนเป็นชิ้นประกอบเล็ก ๆ ที่ไม่ทับซ้อนกันและใช้ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปรที่ขึ้นกับชิ้นประกอบในการสร้างระบบสมการพีชคณิต อีกวิธีที่หาผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์ที่มีโดเมนเป็นโดเมนของปัญหาได้แก่ Element-free Galerkin Method [3] วิธีนี้ต้องแบ่งโดเมนเป็นชิ้นประกอบเล็ก ๆ ที่ไม่ทับซ้อนกันเช่นเดียวกับวิธีไฟไนต์เอ-ลิเมนต์ แต่การที่ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปรใน Element-free Galerkin Method ไม่ขึ้นกับชิ้นประกอบ ทำให้ขั้นตอนการสร้างชิ้นประกอบไม่ซับซ้อน และ Element-free Galerkin Method เข้าข่ายวิธีเมชเลส

การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตเป็นสมการเชิงปริพันธ์อาจกระทำในโดเมนย่อย ซึ่งทำให้ได้จำนวนสมการเชิงปริพันธ์ที่มีโดเมนย่อยเท่ากับจำนวนโดเมนย่อย และสมการเหล่านี้ใช้สร้างระ-บบสมการพีชคณิตได้ โดเมนย่อยต่างจากชิ้นประกอบตรงที่มันอาจทับซ้อนกันได้คล้ายกับที่แสดงในรูปที่ 3 เมื่อใช้การสร้างระบบสมการพีช-คณิตในลักษณะนี้ควบคู่กับความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปรที่ไม่อาศัยชิ้นประกอบจะทำให้ได้วิธีเมชเลสดังเช่น Point Interpolation Method [2,10] และ Local Meshless Petrov-Galerkin Method [4]



รูปที่ 3 สมการเชิงปริพันธ์อาจมีโดเมนเป็นโดเมนย่อยซึ่งทับซ้อนกันได้

4. Differential Quadrature Method

วิธีเมชเลสที่มีประสิทธิภาพและง่ายต่อการใช้วิธีหนึ่งคือ Differential Quadrature Method กำหนดให้โดเมนของปัญหาคือ Ω และขอบเขตคือ Γ สมการเชิงอนุพันธ์ที่ต้องการแก้คือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x,y) \tag{9}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต

$$u(x,y) = h(x,y) \qquad ((x,y) \text{ อยู่บน } \Gamma) \tag{10}$$

ภายในโดเมนมีบัพจำนวน N บัพ พิจารณาบัพ i ซึ่งไม่ได้อยู่บน Γ กำหนดโดเมนย่อย Ω_i ซึ่งประกอบด้วย n บัพรวมทั้งบัพ i บัพจำนวน n-1 บัพที่ล้อมรอบบัพ i อาจเลือกจากบัพที่อยู่ใกล้บัพ i ที่สุด ซึ่งโปรแกรมคอมพิวเตอร์ง่าย ๆ สามารถหาบัพเหล่านี้ได้

ในการแก้สมการ (9) และ (10) ด้วย Differential Quadrature Method ฟังก์ชัน u จะประมาณด้วยผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของฟังก์ชันที่เป็นอิสระต่อกัน n ฟังก์ชัน

$$u(x_j, y_j) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x_j, y_j) a_k \tag{11}$$

p_k เป็นฟังก์ชันฐานที่เป็นอิสระต่อกัน ตัวอย่างของ p_k คือพหุนามสองตัวแปร โดย n = 6

$$p_1(x, y) = 1 \tag{12}$$
$$p_2(x, y) = x \tag{13}$$
$$p_3(x, y) = y \tag{14}$$
$$p_4(x, y) = x^2 \tag{15}$$
$$p_5(x, y) = xy \tag{16}$$
$$p_6(x, y) = y^2 \tag{17}$$

p_k อาจรวมถึงฟังก์ชันพหุนามอันดับสูงซึ่งจะช่วยให้ผลเฉลยที่คำนวณได้มีความแม่นยำมากขึ้น ค่าประมาณของอนุพันธ์ย่อยในสมการ (9) ที่บัพ i สามารถหาได้โดยใช้สมการ (11)

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 p_k(x_i, y_i)}{\partial x^2} a_k \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 p_k(x_i, y_i)}{\partial y^2} a_k \tag{19}$$

นอกจากนี้ค่าอนุพันธ์ย่อยทั้งสองอาจประมาณด้วยค่าของตัวแปรที่บัพต่าง ๆ ใน Ω คล้ายกับการประมาณค่าปริพันธ์ด้วยค่าของตัวแปรที่บัพต่าง ๆ ในโดเมนของปริพันธ์ ซึ่งเป็นที่มาของชื่อวิธีนี้

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{n} u(x_j, y_j) b_j \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial y^2} = \sum_{j=1}^{n} u(x_j, y_j) c_j \tag{21}$$

แทนค่าอนุพันธ์ย่อยของ u จากสมการ (18) และ (19) ลงในด้านซ้ายของสมการ (20) และ (21) ตามลำดับ และแทนค่า u จากสมการ (11) ลงในด้านขวาของสมการ (20) และ (21)

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 p_k(x_i, y_i)}{\partial x^2}\right] a_k = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} p_k(x_j, y_j) b_j\right] a_k \tag{22}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 p_k(x_i,y_i)}{\partial y^2}\right]a_k = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} p_k(x_j,y_j)c_j\right]a_k \tag{23}$$

สมการ (22) และ (23) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ที่มี b_j และ c_j เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

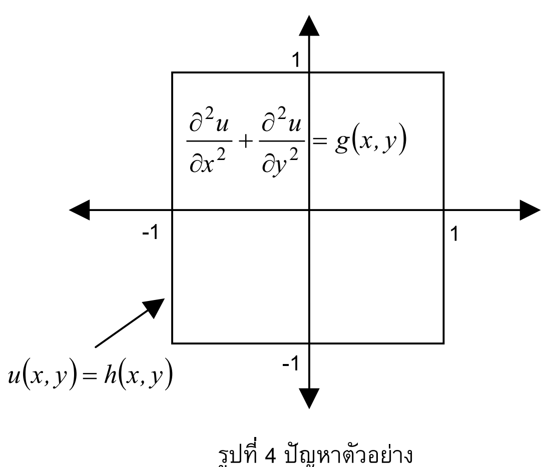
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p_1(x_i,y_i)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p_1(x_i,y_i)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 p_2(x_i,y_i)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p_2(x_i,y_i)}{\partial y^2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 p_n(x_i,y_i)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p_n(x_i,y_i)}{\partial y^2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} p_1(x_1,y_1) & p_1(x_2,y_2) & \cdots & p_1(x_n,y_n) \\ p_2(x_1,y_1) & p_2(x_2,y_2) & \cdots & p_2(x_n,y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n(x_1,y_1) & p_n(x_2,y_2) & \cdots & p_n(x_n,y_n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_n & c_n \end{bmatrix} \tag{24}$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ b_j และ c_j ในสมการ (20) และ (21) ได้จากการแก้สมการ (24) สมการเชิงอนุพันธ์ (9) และเงื่อนไขขอบเขต (10) จึงสามารถแปลงเป็นระบบสมการพีชคณิตที่ใช้หาผลเฉลย u_i ที่บัพ i เท่ากับ 1 ถึง n ได้

5. ตัวอย่างการคำนวณ

เพื่อทดสอบการทำงานของ Differential Quadrature Method วิธีนี้จะใช้เปรียบเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (9) และเงื่อนไขขอบเขต (10) โดยที่โดเมนของปัญหาเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 ปัญหาตัวอย่าง

ผลเฉลยแม่นตรงของปัญหานี้คือ $h(x,y)$ ถ้าใช้ Differential Quadrature Method และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หาผลเฉลยโดยประมาณ u_i ที่บัพ i ภายใน Ω ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นสามารถคำนวณได้จาก

$$\varepsilon = \frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\left[h(x_i,y_i)-u_i\right]^2\right]^{1/2}}{\left[\sum_{i=1}^{N} h(x_i,y_i)^2\right]^{1/2}} \tag{25}$$

ในขั้นตอนการเตรียมข้อมูลก่อนการใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เมชไม่เป็นระเบียบซึ่งประกอบด้วยชิ้นประกอบสี่เหลี่ยม 4 บัพ (4-node quadrilateral element) จำนวน 100 ชิ้นประกอบจะถูกสร้างขึ้น ทำให้มีจำนวนบัพภายในโดเมน 81 บัพ สำหรับขั้นตอนการเตรียมข้อมูลก่อนใช้ Differential Quadrature Method ก็คล้ายกันและใช้บัพจำนวนเท่ากันที่อยู่ตำแหน่งเดียวกัน เพียงแต่ว่าไม่มีการสร้างชิ้นประกอบหรือเมช ฟังก์ชันฐานของ Differential Quadrature Method เป็นฟังก์ชันพหุนามจำนวน 6 ฟังก์ชันตามสมการ (12)-(17)

ผลเฉลยจาก Differential Quadrature Method และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกันใน 4 กรณี โดยแต่ละกรณีมีฟังก์ชัน g(x,y) และ h(x,y) ต่างกันดังนี้

(1) $g(x,y) = 4$; $h(x,y) = (x + y)^2$

(2) $g(x,y) = 24(x + y)^2$; $h(x,y) = (x + y)^4$

(3) $g(x,y) = 2e^{(x+y)}$; $h(x,y) = e^{(x+y)}$

(4) $g(x,y) = 2/(x + y + 2.5)^3$; $h(x,y) = 1/(x + y + 2.5)$

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยของ Differential Quadrature Method (DQM) และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM)

กรณี	DQM	FEM
1	8.41091×10^{-16}	3.41293×10^{-4}
2	1.87105×10^{-2}	1.98914×10^{-2}
3	7.87303×10^{-5}	8.27916×10^{-5}
4	5.07985×10^{-5}	6.55038×10^{-5}

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจากวิธีทั้งสองใน 4 กรณีดังกล่าว เป็นที่น่าสังเกตว่าในกรณีที่ 1 ค่าคลาดเคลื่อนของ Differential Quadrature Method มีค่าน้อยมากเนื่องจากการที่ฟังก์ชันฐานของ Differential Quadrature Method ทั้ง 6 ฟังก์ชันรวมกันเป็นฐานที่สมบูรณ์ของปริภูมิฟังก์ชันพหุนามสองตัวแปรอันดับสองทำให้ Differential Quadrature Method สามารถให้ผลเฉลยที่เป็นฟังก์ชันพหุนามสองตัวแปรอันดับสองใด ๆ ได้อย่างแม่นยำ อย่างไรก็ตามในกรณีที่ 2 ถึง 4 ผลเฉลย Differential Quadrature Method และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีค่าคลาดเคลื่อนใกล้เคียงกัน ผลการเปรียบเทียบนี้แสดงให้เห็นว่า Differential Quadrature Method มีสมรรถนะไม่ด้อยไปกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่ใช้งานได้ง่ายกว่าเนื่องจากทำงานโดยไม่อาศัยชิ้นประกอบ

6. สรุป

วิธีเมชเลสได้เปรียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายเช่นวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตรงที่ขั้นตอนการเตรียมข้อมูลของวิธีเมชเลสง่ายกว่า ในบทความนี้แสดงให้เห็นหลักการ

ทำงานของ Differential Quadrature Method ซึ่งเป็นวิธีเมชเลสที่เข้าใจง่ายวิธีหนึ่งและมีสมรรถนะไม่ด้อยไปกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับวิธีเมชเลสอื่น ๆ ที่ถึงแม้จะมีขั้นตอนการกำหนดความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปรและขั้นตอนการสร้างระบบสมการพีชคณิตจากสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตต่างจาก Differential Quadrature Method แต่ก็น่าจะมีประสิทธิภาพในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ใกล้เคียงกัน ในปัจจุบันวิธีเมชเลสนอกจากจะได้รับการพัฒนาให้ใช้งานง่ายโดยไม่อาศัยชิ้นประกอบในการทำงานแล้ว ยังได้รับการพัฒนาให้หาผลเฉลยที่แม่นยำขึ้นในการแก้ปัญหาหลายรูปแบบอีกด้วย จึงมีความเป็นไปได้สูงที่วิธีเมชเลสจะเป็นทางเลือกใหม่ของการคำนวณเชิงวิศวกรรมศาสตร์ในอนาคต

เอกสารอ้างอิง

[1] T. Liszka and J. Orkisz, “The Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Grids and Its Application in Applied Mechanics”, Computers and Structures, 1980, Vol. 11, pp. 83-95.

[2] G. R. Liu and Y. T. Gu, “A Matrix Triangulation Algorithm for Polynomial Point Interpolation Method”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, Vol. 192, pp. 2269-2295.

[3] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu, “Element-free Galerkin Methods”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, Vol. 37, pp. 229-256.

[4] S. N. Atluri and T. Zhu, “A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics”, Computational Mechanics, 1998, Vol. 22, pp. 117-127.

[5] E. J. Kansa, “Multiquadrics – A Scattered Data Approximation with Applications to Computational Fluid Dynamics – II: Solutions to Parabolic, Hyperbolic, and Elliptic Partial Differential Equations”, Computers and Mathematics with Applications, 1990, Vol. 19, pp. 147-161.

[6] M. A. Golberg, “The Method of Fundamental Solutions for Poisson’s Equation”, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1995, Vol. 16, pp. 205-213.

[7] C. Shu, H. Ding, and K. S. Yeo, “Local Radial Basis Function-based Differential Quadrature Method and Its Application to Solve Two-dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, Vol. 192, pp. 941-954.

[8] J. J. Monaghan, “Smooth Particle Hydrodynamics”, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 1992, Vol. 30, pp. 543-574.

[9] W. K. Liu, S. Jun, and T. Belytschko, “Reproducing Kernel Particle Methods”, International Journal of Numerical Methods in Fluids, 1995, Vol. 20, pp. 1081-1106.

[10] J. G. Wang and G. R. Liu, “On the Optimal Shape Parameters of Radial Basis Functions Used for 2-D Meshless Methods”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, Vol. 191, pp. 2611-2630.