การประชุมเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 17
15-17 ตุลาคม 2546 จังหวัดปราจีนบุรี

# วิธี Adaptive Mesh Refinement สำหรับการไหลในชั้นชิดผิว

# Adaptive Mesh Refinement Method for Flow in Boundary Layer

สอาด สุลักษณ์ [1], อัครพล มีสิทธิ์ [2], วรางค์รัตน์ จันทสาโร[2], เอกชัย จันทสาโร[1] และ จักษ์ อัศวานันท์ [3]
[1] ห้องปฏิบัติการวิจัยพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (CFD Lab)
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
อ.เมือง จ.นครราชสีมา 30000
โทร (044) 224410-1, โทรสาร (044) 224411, E-Mail: ssaard@hotmail.com
[2] ห้องปฏิบัติการกลศาสตร์เชิงคำนวณ (CML)
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
บางเขน กรุงเทพฯ 10900
โทร (02) 9428555 ต่อ 1829, โทรสาร (02) 5794576, E-Mail: ovrsk@ku.ac.th
[3] ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
กรุงเทพฯ 10330
โทร (02) 2185141, โทรสาร (02) 2552287, E-Mail: ajack@chula.ac.th

**บทคัดย่อ**

บทความนี้นำเสนอหลักการและวิธีการ Adaptive Mesh Refinement (AMR) เพื่อแก้สมการชั้นชิดผิว(boundary layer) 1 มิติ ทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น วิธีการนี้ใช้แนวคิดในส่วนการปรับสร้างกริดให้เหมาะสมต่อการคำนวณให้มากที่สุด การคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณที่จุดต่างๆ สามารถทำได้โดยวิธีการ Richardson Extrapolation บริเวณที่ค่าคลาดเคลื่อนมีขนาดเกินกว่าที่กำหนด จะถูกกำหนดขอบเขตเพื่อสร้างกริดระดับ(level) ใหม่ที่มีความละเอียดมากขึ้น การเปรียบเทียบเชิงประสิทธิภาพความเร็ว และจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณระหว่างเทคนิค AMR เทคนิคมัลติกริด(multigrid) แบบวัฏจักรวี และเทคนิคกริดเดียว(single-grid) สำหรับปัญหาการไหลในชั้นชิดผิว 1 มิติแบบต่างๆ พบว่าเทคนิค AMR ให้ค่าผลเฉลยที่มีความถูกต้องสูง ช่วยลดเวลาการคำนวณและจำนวนจุดทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณลงได้กว่า 10000 เท่า และ 25 เท่า เมื่อเทียบกับเทคนิคกริดเดียว และลดได้กว่า 3 เท่า และ 75 เท่า เมื่อเทียบกับเทคนิคมัลติกริด

**Abstract**

The Adaptive Mesh Refinement (AMR) method for solving both linear and nonlinear one-dimensional boundary layer equations is presented. The method is employed to create the optimal grid refinement for numerical computation. The Richardson extrapolation method is used to estimate the solution errors. Regions of high estimation error are specified and the new level of finer grid is created and overlaid that regions. The method is tested on one-dimensional boundary layer problems for assessment of the computing time and the computational grid points used in comparison with the single-grid and the V-cycle multigrid techniques. It is found that the AMR results are in good agreement with the very fine grid results. Furthermore, the AMR technique improves the computing time to approximately 10000 times faster and reduces the computational grid points to about 25 times comparing to the single-grid technique, and approximately 3 times and about 75 times comparing to the V-cycle multigrid technique.

## 1. บทนำ

เป็นที่ทราบกันดีแล้วว่า ความถูกต้องของการคำนวณเชิงตัวเลขขึ้นอยู่กับสององค์หลัก คือ แผนวิธีประมาณค่า(numerical scheme) และจำนวนกริดที่ใช้ โดยทั่วไปแล้วแผนวิธีประมาณค่าที่ให้อันดับความถูกต้องสูง มักมีความยุ่งยากในการประยุกต์ใช้งานและมีข้อจำกัดอื่นๆ พ่วงติดมาด้วย เช่น เมื่อประยุกต์แผนวิธีประมาณค่าแบบผลต่างกลาง เข้าแก้ปัญหาการไหลที่มีค่าเลขเรย์โนลด์สูงๆ แล้ว การคำนวณมักจะขาดเสถียรภาพ อันเนื่องมาจากแผนวิธีดังกล่าวไม่สามารถกำกับทิศทางการไหลได้ เป็นต้น ด้วยเหตุนี้ การเพิ่มความถูกต้องของผลเฉลยให้สูงขึ้น

โดยการใช้กริดจำนวนมากขึ้น จึงเป็นทางเลือกที่ง่ายและมีเสถียรภาพกว่าการใช้แผนวิธีประมาณค่าที่ให้อันดับความถูกต้องสูง

การคำนวณเชิงตัวเลขแบบวนซ้ำ โดยทั่วไปมักใช้กริดเดียว กล่าวคือ การคำนวณตั้งแต่รอบแรกจนถึงรอบสุดท้ายเกิดขึ้นบนกริดชุดเดียว เทคนิคนี้มีข้อด้อยคือ เมื่อต้องการผลเฉลยที่ถูกต้องสูงขึ้น จำเป็นต้องใช้กริดจำนวนมากขึ้น ส่งผลให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณมากขึ้นเช่นกัน แนวทางที่สามารถเร่งให้การคำนวณเร็วขึ้นได้มากวิธีหนึ่ง คือ เทคนิคมัลติกริด [1,2] ซึ่งใช้กริดหยาบหลาย ๆ ขนาดร่วมกันในการคำนวณ เพื่อใช้กำจัดค่าคลาดเคลื่อนความถี่ต่ำที่เป็นต้นเหตุของความล่าช้า แต่เทคนิคนี้ก็มีข้อด้อยคือ การสร้างกริดทุกชุด ใช้การแบ่งละเอียดตลอดทั้งโดเมน (global refinement) ซึ่งความเป็นจริงแล้วอาจไม่จำเป็นต้องทำเช่นนั้น ในบริเวณที่การเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยมีความราบเรียบสูง ผลเฉลยบนกริดหยาบก็มีความถูกต้องเพียงพอในระดับที่ยอมรับได้ โดยไม่จำเป็นต้องใช้กริดละเอียดแต่อย่างใด ด้วยเหตุนี้การแบ่งละเอียดเฉพาะที่(local refinement) ซึ่งเป็นเทคนิค AMR จึงถูกพัฒนาขึ้นมาใช้ เทคนิคนี้กริดระดับใหม่ที่ละเอียดขึ้นจะถูกสร้างขึ้นในบริเวณที่ความถูกต้องของผลเฉลยยังไม่เพียงพอ การคำนวณบนกริดระดับใหม่จึงเกิดขึ้นบนส่วนนั้นๆ เท่านั้น เทคนิค AMR นี้ Berger [3] ได้นำไปประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง เพื่อแก้ปัญหาแบบไฮเปอร์โบลิกทั้ง 1 มิติและ 2 มิติ โดยทำการแบ่งละเอียดทั้งขนาดกริดและขั้นเวลา โดเมนย่อยที่เกิดขึ้นสามารถหมุนทำมุมไปในทิศทางต่าง ๆ ได้ ตามลักษณะและรูปร่างของบริเวณที่แบ่งละเอียด หลักการของ Berger ถูกนำไปประยุกต์ใช้ต่อโดย Caruso [4] เพื่อแก้สมการนาเวียร์-สโตกส์ 2 มิติ นอกจากนี้ยังพบการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ ได้อย่างได้ผล [5]

บทความนี้นำเสนอหลักการพื้นฐานของวิธี AMR และผลที่ได้จากการนำไปประยุกต์แก้สมการชั้นชิดผิว 1 มิติ ทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น โดยเทคนิค AMR ที่ใช้เรียกว่าวิธี passive ซึ่งเหมาะกับปัญหาที่มีความเป็นเชิงเส้น และใช้การคำนวณซ้ำแบบวิธีเกาส์-ไซเดล(Gauss-Seidel method) วิธี Richardson Extrapolation ถูกใช้เพื่อคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณที่จุดต่าง ๆ [3,4] ประสิทธิภาพของเทคนิค AMR ได้รับการทดสอบกับปัญหาการไหลในชั้นชิดผิว 1 มิติ เพื่อประเมินเทียบกับเทคนิคกริดเดียวและเทคนิคมัลติกริดแบบวัฏจักรวี ในเชิงความรวดเร็วและจำนวนจุดทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณ

## 2. หลักการของเทคนิค AMR

เมื่อทำการประมาณค่าพจน์อนุพันธ์ด้วยอนุกรมเทเลอร์ ความถูกต้องของแผนวิธีประมาณค่าขึ้นอยู่กับอันดับของพจน์อนุกรมที่ถูกตัดทิ้ง หากกำหนดให้ $u(0,x)$ เป็นผลเฉลยแม่นตรง และ $u(h,x)$ เป็นผลเฉลยที่ได้จากการประมาณด้วยอันดับความถูกต้อง $p$ บนกริดที่มีระยะกริด $h$ ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณ $e(h,x)$ สามารถหาได้จาก

$$\begin{aligned} e(h,x) &= u(0,x) - u(h,x) \\ &= h^p F(x) + h^q G(x) + \ldots \end{aligned} \qquad (1)$$

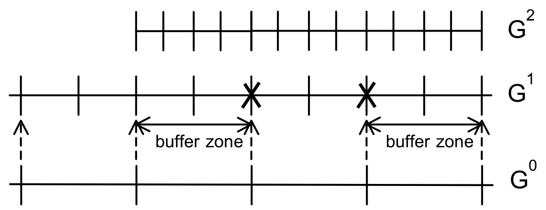
ทำนองเดียวกัน ค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจากการประมาณด้วยอันดับความถูกต้อง $p$ บนกริดขนาด $2h$ ก็จะมีรูปความสัมพันธ์เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} e(2h,x) &= u(0,x) - u(2h,x) \\ &= 2^p h^p F(x) + 2^q h^q G(x) + \ldots \end{aligned} \qquad (2)$$

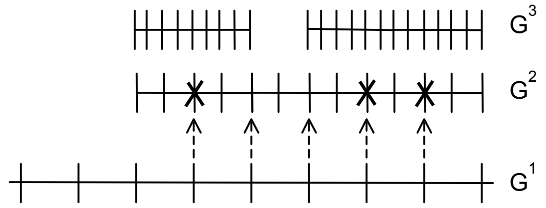
นำสมการที่ (1) ลบด้วยสมการที่ (2) แล้วหารด้วย $2^p - 1$ ก็จะได้ค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณ $\tilde{e}$ บนกริดขนาด $h$ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \tilde{e}(h,x) &= \frac{u(2h,x) - u(h,x)}{2^p - 1} \\ &= h^p F(x) + h^q \left( \frac{2^q - 1}{2^p - 1} \right) G(x) + \ldots \end{aligned} \qquad (3)$$

สมการที่ (3) แสดงให้เห็นว่า ค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณ $\tilde{e}(h,x)$ ของผลเฉลยบนกริดชุดปัจจุบัน สามารถหาได้จากผลเฉลยโดยประมาณบนกริดชุดนั้น และผลเฉลยโดยประมาณบนกริดที่หยาบกว่า ซึ่งก็คือหลักการวิธี Richardson Extrapolation




(ก) การแบ่งละเอียด 2 ระดับกริด




(ข) การแบ่งละเอียด 3 ระดับกริด

รูปที่ 1 ตัวอย่างการแบ่งละเอียดบนกริด 1 มิติ

ตัวอย่างการแบ่งละเอียดบนกริด 1 มิติแสดงในรูปที่ 1 หากกำหนดให้ $G^{k-1}$, $G^k$ และ $G^{k+1}$ เป็นกริดหยาบและกริดละเอียดระดับถัดขึ้นไปตามลำดับ การแบ่งละเอียดเพื่อสร้างกริดระดับใหม่นั้น เริ่มจากการคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณที่จุดต่าง ๆ บนกริด $G^k$ โดยใช้สมการที่ (3) (สำหรับการคำนวณหาค่า

คลาดเคลื่อนบนกริดฐาน G[1] ต้องจำลองกริดที่หยาบกว่ากริดฐานและคำนวณหาผลเฉลยบนกริดนั้นก่อน) จุดที่มีค่าคลาดเคลื่อนเกินขนาดที่กำหนดจะถูกระบุตำแหน่งไว้ (แสดงด้วยเครื่องหมายกากบาท) และได้รับการจัดกลุ่ม โดยจุดที่อยู่ประชิดกันจะถูกจัดไว้ในกลุ่มเดียวกัน กลุ่มจุดเหล่านี้จะได้รับการกำหนดขอบเขตโดยการสร้างเขตกันชน(buffer zone) ขยายออกไปด้านซ้ายและด้านขวาตามค่าที่กำหนด (ตัวอย่างกริดในรูปที่ 1 กำหนดค่าเท่ากับหนึ่งช่องกริดหยาบ) กลายเป็นบริเวณสำหรับการแบ่งละเอียด ตำแหน่งของจุดในบริเวณดังกล่าวจะถูกใช้อ้างอิงเพื่อการแบ่งละเอียดตามค่าสัดส่วนกริด(grid ratio) ที่กำหนด กริดละเอียดที่ถูกสร้างขึ้นใหม่จะทับซ้อน(overlaid) อยู่เหนือกริดหยาบ หากบริเวณสำหรับการแบ่งละเอียดมีมากกว่าหนึ่งแห่งและอยู่ในระยะที่ไม่ประชิดกัน ก็จะทำให้ได้หลายโดเมนย่อย (sub-domain) บนกริดระดับใหม่ การคำนวณและการสร้างกริดระดับถัดไปจะวนเช่นนี้ไปเรื่อยๆ อย่างอัตโนมัติ จนกว่าผลการคำนวณจะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดไว้

จะเห็นได้ว่า การแบ่งละเอียดเพื่อสร้างกริดระดับใหม่นั้นเขตกันชนมีความสำคัญมากกับการกำหนดค่าต่างๆ ที่ขอบของกริดละเอียด โดยเขตกันชนจะใช้เป็นขอบเขตกริดละเอียด ค่าผลเฉลยที่ตำแหน่งเขตกันชนจะถูกใช้เป็นค่าขอบบนกริดละเอียด ส่วนผลเฉลยค่าเริ่มต้นบนกริดละเอียด ได้จากการส่งถ่ายมาจากกริดหยาบ แต่อย่างไรก็ตาม ขนาดของเขตกันชนขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของปัญหาที่ต้องการแก้ ไม่สามารถระบุค่าที่เหมาะสมที่แน่นอนได้ โดยทั่วไปสำหรับปัญหาที่ซับซ้อนมักกำหนดให้มีขนาดมากกว่าหนึ่งช่องกริดหยาบ

### 3. สมการชั้นชิดผิวและเทคนิคที่ใช้ในการหาผลเฉลย

เนื่องจากสมการพื้นฐานสำหรับปัญหาการไหลทั่วไป เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น การหาผลเฉลยแม่นตรงจึงเป็นเรื่องที่ทำได้ยากมาก หรือแทบจะเป็นไปไม่ได้เลย กว่า 60 ปีที่ผ่านมาจึงมีการพัฒนาการประมาณเชิงวิเคราะห์ และการประมาณเชิงตัวเลขขึ้นอย่างต่อเนื่อง วิธีการประมาณเชิงวิเคราะห์ที่ประสพผลสำเร็จจนถึงปัจจุบันวิธีหนึ่ง คือการหาผลเฉลยแบบ asymptotic ที่เรียกว่าวิธีการเพอร์เทอร์เบชัน (perturbation methods) โดยทฤษฎีการไหลในชั้นชิดผิวของแพรนเดิล(Prandtl) เป็นต้นแบบที่สำคัญของการพัฒนาวิธีการเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกพันธ์ ซึ่งใช้ในการประมาณเชิงวิเคราะห์ปัญหาการไหลในชั้นชิดผิวทั่วไป แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายที่ใช้ศึกษาพฤติกรรมของการไหลในชั้นชิดผิวคือ

$$\varepsilon y''(x) + y'(x) = f\,, \quad y(0)=0,\ y(1)=1 \qquad (4)$$

สำหรับ $0<\varepsilon<<1$ และ $f \ge 0$ โดยที่ $\varepsilon$ คือส่วนกลับของเลขเรย์โนลด์ ชั้นชิดผิวสำหรับปัญหานี้เกิดขึ้นในบริเวณ $x=0$ ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงค่าของผลเฉลยสูงมาก และเป็นบริเวณที่ผลเฉลยประมาณเชิงตัวเลขมีความถูกต้องต่ำ เนื่องจากเกรเดียนต์ของผลเฉลยมีค่าเกือบเป็นอนันต์เมื่อ $x=0$ ปัญหาในลักษณะนี้จึงเหมาะที่จะใช้ทดสอบวิธีการ AMR

พิจารณาสมการชั้นชิดผิว 1 มิติ ซึ่งมีรูปทั่วไปเป็นดังนี้

$$\varepsilon y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \ ; \ x_1 < x < x_2 \qquad (5)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบเป็น $y(x_1)=y_1$ , $y(x_2)=y_2$ สำหรับในกรณีที่พารามิเตอร์ $0<\varepsilon<<1$ และ $a(x)$ , $b(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใดๆ พจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งจะถูกประมาณโดยวิธีผลต่างต้นกระแส(upwind scheme) ส่วนพจน์อนุพันธ์อันดับสองจะใช้วิธีผลต่างกลาง ซึ่งมีสูตรเป็นดังนี้

*วิธีผลต่างต้นกระแส*

$$y'_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h} \quad \text{เมื่อ } a(x_i) \ge 0 \qquad (6\text{-}1)$$

$$y'_i = \frac{y_i-y_{i-1}}{h} \quad \text{เมื่อ } a(x_i) < 0 \qquad (6\text{-}2)$$

*วิธีผลต่างกลาง*

$$y''_i = \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} \qquad (7)$$

กำหนดปัญหาทดสอบ A, B และ C เป็นปัญหาเชิงเส้น [4] ส่วนปัญหา D เป็นปัญหาไม่เชิงเส้น (ซึ่งสัมประสิทธิ์ $a(x)$ ถูกแทนด้วย $y(x)$ ) หากมิได้กำหนดเงื่อนไขและค่าคงตัวเป็นอย่างอื่น การคำนวณจะถือใช้ค่าดังต่อไปนี้ $\varepsilon = 0.01$ ขนาดเขตกันชนเท่ากับ 1 ช่องกริดหยาบ ค่าสัดส่วนกริด $r=2$ (ขนาดกริดละเอียดเป็นครึ่งหนึ่งของขนาดกริดหยาบ) ระดับค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณของผลเฉลย $\delta = 10^{-3}$ และระดับความถูกต้องของการคำนวณด้วยเกาส์-ไซเดล $\delta_R = 0.01\delta$ รูปสมการชั้นชิดผิวและเงื่อนไขค่าขอบของแต่ละปัญหาทดสอบ เป็นตามลำดับดังต่อไปนี้

A : Simple Boundary Layer

$$\varepsilon y'' - y' = 0 \qquad (8\text{-}1)$$

เงื่อนไขค่าขอบ $y(-1)=1$ , $y(1)=2$

B : Internal Boundary Layer

$$\varepsilon y'' + xy' = -1 \qquad (8\text{-}2)$$

เงื่อนไขค่าขอบ $y(0)=0$ , $y(1)=0$

C : Boundary Layer with Tuning Point

$$\varepsilon y'' + |x|\,y' + \left(x-\frac{1}{2}\right)^3 y = 0 \qquad (8\text{-}3)$$

เงื่อนไขค่าขอบ $y(-1)=1$ , $y(1)=2$ และ $\delta = 10^{-2}$

D : Boundary Layer with Non-constant Inner Solution

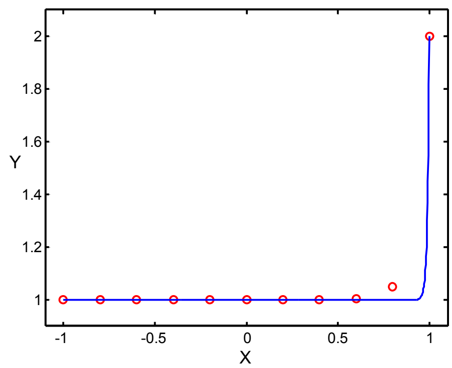
$$\varepsilon y'' + yy' + 0.5\,|\,y\,| = 0 \qquad (84)$$

เงื่อนไขค่าขอบ $y(-1)=1$ , $y(1)=1$ และ $\varepsilon = 0.0001$

ขั้นตอนการคำนวณแบบ passive เริ่มจากการหาผลเฉลยบนกริดฐาน จากนั้นคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณโดยใช้สมการที่ (3) (โดยกำหนดค่า $p=1$ เนื่องจากใช้แผนวิธีประมาณค่าแบบผลต่างต้นกระแสร่วมด้วย) จุดที่มีค่าคลาดเคลื่อนเกินกว่าขนาดที่กำหนดจะถูกระบุตำแหน่งไว้ เมื่อสามารถระบุตำแหน่งได้แล้ว จึงใช้หลักการตามที่นำเสนอไว้ในรูปที่ 1 เพื่อทำการแบ่งละเอียดสร้างเป็นกริดระดับถัดไป บนกริดละเอียดชุดใหม่นี้ ผลเฉลยค่าเริ่มต้นรวมถึงค่าขอบได้จากการส่งถ่ายมาจากกริดหยาบ ซึ่งจะพบว่า ค่าขอบของกริดละเอียดก็คือค่าที่ตำแหน่งกันชนของกริดหยาบนั่นเอง การคำนวณและแบ่งละเอียดจะดำเนินไปเช่นนี้เรื่อยๆ จนกว่าค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลยของทุกจุดมีค่าน้อยกว่าระดับค่าที่ตั้งไว้ หรือจนกว่าขนาดของกริดละเอียดสุดมีค่าน้อยกว่าที่กำหนดไว้ ซึ่งในที่นี้ได้กำหนดให้กริดละเอียดสุดต้องมีขนาดกริดไม่น้อยกว่า $0.01\delta$

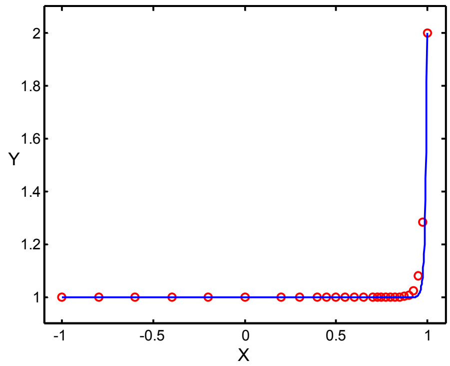
**4. ผลการทดสอบ**

รูปที่ 2 แสดงผลจากการใช้เทคนิค AMR สำหรับปัญหาทดสอบ A โดยจุดวงกลมเป็นผลเฉลยที่ได้จากการใช้วิธี AMR ส่วนเส้นกราฟทึบเป็นผลเฉลยบนกริดที่ละเอียดมาก(ประมาณได้กับผลเฉลยแม่นตรง) จากรูปที่ 2 จะเห็นได้ถึงการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยที่มีความถูกต้องมากขึ้นเมื่อระดับกริดเพิ่มขึ้น หากสังเกตบริเวณมุมหักของกราฟ จะพบว่ากริดมีความหนาแน่นเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ ทั้งนี้เนื่องจากเป็นบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงสูง กริดจึงได้รับการแบ่งละเอียดเพิ่มขึ้น ส่งผลให้ผลเฉลยมีความถูกต้องสูงขึ้นโดยลำดับ ในขั้นตอนการแบ่งละเอียดเพื่อสร้างกริดละเอียดระดับใหม่นั้น ขอบเขตที่ใช้ในการคำนวณจะมีตำแหน่งที่เปลี่ยนไปด้วย ดังในตารางที่ 1 แสดงข้อมูลกริดของปัญหา A ที่แบ่งละเอียด 1 ถึง 12 ระดับ จะเห็นที่ได้ว่า ขอบเขตซ้ายมีตำแหน่งที่เปลี่ยนไปเมื่อระดับกริดเพิ่มขึ้น โดยเลื่อนเข้าหาขอบเขตขวาซึ่งคงที่อยู่ที่ตำแหน่ง $x=1$

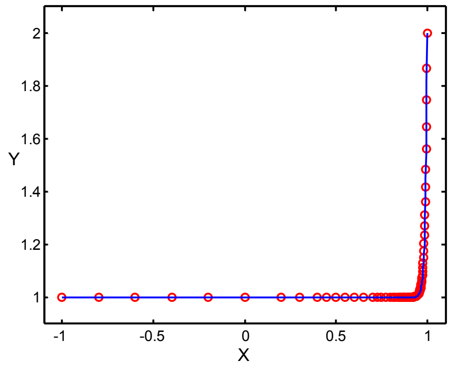



(ก) กริดฐาน

รูปที่ 2 ผลเฉลยของปัญหา A บนกริดจำนวนระดับต่างๆ

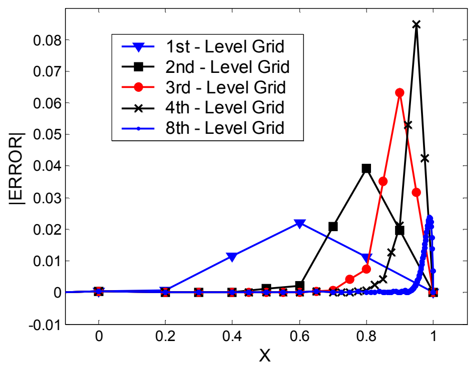



(ข) กริด 4 ระดับ




(ค) กริด 8 ระดับ

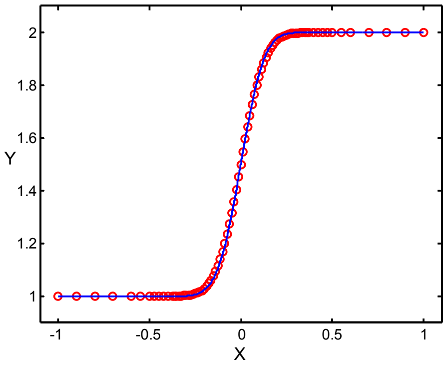
รูปที่ 2 ผลเฉลยของปัญหา A บนกริดจำนวนระดับต่างๆ (ต่อ)



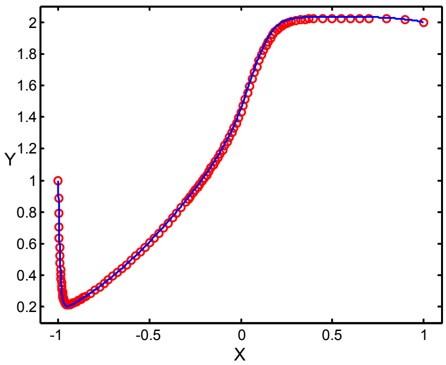

รูปที่ 3 ค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณบนกริดจำนวนระดับต่างๆ ของปัญหา A

รูปที่ 3 แสดงค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณบนกริดระดับต่างๆ ของปัญหา A จากรูปจะเห็นได้ว่า ฐานของส่วนที่คลาดเคลื่อนสูงจะแคบลงเรื่อยๆ ซึ่งแสดงว่าขอบเขตของการคำนวณมีช่วงที่แคบลงเรื่อยๆ เช่นกัน หากสังเกตขนาดของค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณที่เกิดขึ้น จะพบว่ามีขนาดใหญ่ขึ้นในต้นๆ ระดับกริด (จากรูปคือบนกริด 1 ระดับถึง 4 ระดับ) ที่เป็นเช่นนี้เพราะช่วงดังกล่าวการเปลี่ยนแปลงค่าของผลเฉลยสูงมาก กริดหยาบต้นๆ ระดับจึงยังไม่ละเอียดพอที่จะจับการเปลี่ยนแปลงที่

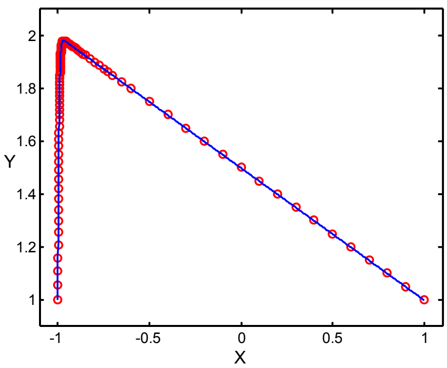
ตำแหน่งในช่วงดังกล่าวได้ แต่เมื่อกริดมีความละเอียดเพียงพอและสามารถจับการเปลี่ยนแปลงได้แล้ว ค่าคลาดเคลื่อนดังกล่าวก็จะมีขนาดเล็กลง ดังเช่นเส้นกราฟที่กริด 8 ระดับ




รูปที่ 4 ผลเฉลยของปัญหา B บนกริด 5 ระดับ




รูปที่ 5 ผลเฉลยของปัญหา C บนกริด 7 ระดับ




รูปที่ 6 ผลเฉลยของปัญหา D บนกริด 9 ระดับ

รูปที่ 4 ถึงรูปที่ 6 แสดงผลที่ได้จากการแก้สมการของปัญหา B, C และ D ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่าแต่ละปัญหามีจำนวนบริเวณและตำแหน่งของการแบ่งละเอียดที่ต่างกัน ขึ้นอยู่กับว่าบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงสูงนั้น ปรากฏอยู่ที่ส่วนใดบนโดเมนที่ต้องการแก้ การแบ่งละเอียดและการคำนวณก็จะเกิดขึ้นเฉพาะบริเวณดังกล่าว ส่งผลให้การคำนวณมีความรวดเร็วขึ้น ข้อมูลในตารางที่ 2 แสดงผลเปรียบเทียบจำนวนจุดและเวลาที่ใช้ในการคำนวณด้วยเทคนิคต่างๆ ซึ่งจะเห็นได้ว่าวิธี AMR ใช้จุดในการคำนวณน้อยกว่าอีกสองเทคนิคมาก

ตารางที่ 1 ข้อมูลกริดระดับต่างๆ ของปัญหา A

| LEVEL | LBC | RBC | MESH | DELX |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -1.000 | 1.000 | 11 | 0.2000 |
| 2 | 0.200 | 1.000 | 9 | 0.1000 |
| 3 | 0.400 | 1.000 | 13 | 0.0500 |
| 4 | 0.700 | 1.000 | 13 | 0.0250 |
| 5 | 0.800 | 1.000 | 17 | 0.0125 |
| 6 | 0.850 | 1.000 | 25 | 0.0063 |
| 7 | 0.894 | 1.000 | 35 | 0.0031 |
| 8 | 0.919 | 1.000 | 53 | 0.0016 |
| 9 | 0.936 | 1.000 | 83 | 0.0008 |
| 10 | 0.950 | 1.000 | 129 | 0.0004 |
| 11 | 0.962 | 1.000 | 195 | 0.0002 |
| 12 | 0.973 | 1.000 | 257 | 0.0001 |

หมายเหตุ: LEVEL คือระดับกริด LBC และ RBC คือตำแหน่งขอบเขตซ้ายและขอบเขตขวา ตามลำดับ MESH คือจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณ และ DELX คือขนาดของกริด

ตารางที่ 2 เปรียบเทียบจำนวนจุดและเวลาที่ใช้ในการคำนวณด้วยเทคนิคต่างๆ

| ปัญหาทดสอบ | AMR | MG | SG |
|---|---|---|---|
| A | 840 | 20487 | 10241 |
| (1,12 ) | 2 | 3 | 17044 |
| B | 599 | 1277 | 641 |
| (21,7) | < 1 | 1 | 2 |
| C | 1596 | 20481 | 10241 |
| (21,11) | 3 | 4 | 17890 |
| D | 802 | 61442 | 20481 |
| (21,12) | 2 | 6 | > 36000 |

หมายเหตุ: MG และ SG คือเทคนิคมัลติกริดและเทคนิคกริดเดียว ตามลำดับ โดยความหมายของข้อมูลในแต่ละช่องคือ ตัวเลขแถวบนคือจำนวนจุดทั้งหมดที่ใช้บนทุกระดับกริด ตัวเลขแถวล่างคือเวลา(หน่วยวินาที) ที่ใช้ในการคำนวณ (บนเครื่องคอมพิวเตอร์ Pentium III 1.1 GHz CPU) ตัวเลขในวงเล็บคือจำนวนจุดของกริดฐานและจำนวนระดับกริดที่ใช้ (สำหรับเทคนิค AMR และ MG) ตามลำดับ

## 5. สรุปและวิจารณ์ผล

ผลจากการประยุกต์วิธี AMR แบบ Passive แก้สมการชั้นชิดผิว 1 มิติ ทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น พบว่าเทคนิค AMR ช่วยให้การสร้างกริดเหมาะสมกับการคำนวณเป็นอย่างดี

วิธี Richardson Extrapolation ช่วยให้สามารถระบุตำแหน่งที่ผลเฉลยยังมีความถูกต้องไม่เพียงพอ เพื่อนำเข้าสู่การแบ่งละเอียดสร้างเป็นกริดระดับถัดไป จากผลการทดสอบกับปัญหาทดสอบพบว่า คำตอบที่ได้จากการใช้เทคนิค AMR สอดคล้องกับผลเฉลยบนกริดที่ละเอียดมากๆ เป็นอย่างดี หากพิจารณาความรวดเร็วในการคำนวณและปริมาณข้อมูลที่ต้องจัดเก็บ พบว่าเทคนิค AMR ให้ค่าผลเฉลยที่มีความถูกต้องสูง ช่วยลดเวลาการคำนวณ และจำนวนจุดทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณลงได้กว่า 10000 เท่า และ 25 เท่า เมื่อเทียบกับเทคนิคกริดเดียว และลดได้กว่า 3 เท่า และ 75 เท่า เมื่อเทียบกับเทคนิคมัลติกริด

ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากว่า เทคนิค AMR เป็นการแบ่งละเอียดเฉพาะที่ในบริเวณที่ผลเฉลยมีความถูกต้องไม่เพียงพอเท่านั้น ขอบเขตของการคำนวณบนกริดละเอียดจึงมีขนาดเล็กลง จำนวนจุดที่ใช้จึงน้อยลง เวลาที่ใช้ในการคำนวณจึงลดลงด้วย และผลเฉลยมีความถูกต้องสูงขึ้น

จากที่ได้นำเสนอมาทั้งหมดข้างต้น จะเห็นได้ว่าเทคนิค AMR มีความได้เปรียบเชิงประสิทธิภาพ เมื่อเทียบกับเทคนิคมัลติกริดและเทคนิคกริดเดียวอย่างชัดเจน งานวิจัยที่จะดำเนินการต่อไปในอนาคตคือ การประยุกต์เทคนิค AMR ในการหาผลเฉลยของสมการนาเวียร์-สโตกส์ สำหรับปัญหาการไหลใน 2 มิติ และ 3 มิติ

**กิตติกรรมประกาศ**

ขอขอบคุณศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ (NECTEC) ที่ให้ทุนสนับสนุนในโครงการนี้

**เอกสารอ้างอิง**

[1] A. Brandt, “Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Values Problems”, Mathematics of Computation, 1977, Vol.138, pp.333-390.

[2] S. Sulak, V. Juntasaro, P. Uthayopas, E. Juntasaro, “Fast Solver for Three-Dimensional Turbulent Flow using Multigrid Method”, The ANSCSE 7th, 2003, p.42

[3] M. Berger, “ Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations”, Ph.D. Thesis, Stanford, 1982.

[4] S. Caruso, “Adaptive Grid Techniques for Elliptic Fluid-Flow Problems”, Ph.D. Thesis, Stanford, 1986.

[5] C. Liu, Z. Liu, S. McCormick, “ Multilevel Adaptive Methods for Incompressible Flow in Grooved Channel”, Computational and Applied Mathematics, 1991, Vol.38, pp.283-259.