การประยุกต์ทฤษฎีบทพลังงานเพื่อหาตัวประกอบมาตราส่วน

Application of an Energy Theorem to Derive a Scaling Factor

จิรพงศ์ กสิวิทย์อำนวย[1] ไพโรจน์ สิงหถนัดกิจ[2]
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถ. พญาไท กรุงเทพ ฯ 10330
[1] ห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การแตกหัก โทร 02-2186604 โทรสาร 02-2522889
[2] ห้องปฏิบัติการวิจัยวัสดุคอมโพสิต โทร 02-2186595 โทรสาร 02-2522889 E-mail: Pairod.S@chula.ac.th

Jirapong Kasivitamnuay[1] Pairod Singhatanadgid[2]
Mechanical Engineering Department Chulalongkorn University Phayathai Rd. Bangkok 10330
[1] Fracture Mechanics Research Laboratory Tel. 02-2186604 Fax. 02-2522889
[2] Composite Material Research Laboratory Tel. 02-2186595 Fax. 02-2522889 E-mail: Pairod.S@chula.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยประยุกต์ทฤษฎีบทพลังงานเพื่อหาตัวประกอบมาตราส่วนของระยะเคลื่อนตัว (displacement scaling factor) ตัวประกอบนี้ใช้ทำนายระยะเคลื่อนตัวของโครงสร้างต้นแบบ (prototype) จากข้อมูลระยะเคลื่อนตัวของโครงสร้างจำลอง (model) ณ ตำแหน่งที่สมนัย (correspond) กัน แนวคิดมูลฐานของวิธีนี้คือ ถ้าโครงสร้างสองชุดมีความคล้าย (similarity) ด้านระยะเคลื่อนตัวแล้ว อัตราส่วนระยะเคลื่อนตัวของโครงสร้างทั้งสองในทิศทางเดียวกัน ณ จุดใด ๆ ที่สมนัยกันจะมีค่าคงที่ ด้วยเหตุนี้จึงสามารถหาตัวประกอบมาตราส่วนของระยะเคลื่อนตัวได้จากการวิเคราะห์จุดที่สมนัยกันเพียงจุดเดียว ทฤษฎีบทพลังงานที่ประยุกต์ใช้ประกอบด้วย 1) ทฤษฎีบทการอนุรักษ์พลังงาน และ 2) ทฤษฎีบทที่ 2 ของ Castigliano ตัวประกอบมาตราส่วนที่ได้ถูกนำไปตรวจสอบความถูกต้องกับโครงสร้างที่ทราบผลเฉลยแม่นตรง คือ โครงถัก และคาน ผลการตรวจสอบแสดงให้เห็นว่าตัวประกอบมาตรส่วนที่ได้มีความถูกต้อง

Abstract

This research applied the energy theorems to derive a displacement scaling factors. These factors can be used to predict a displacement of a prototype from a known displacement at a corresponding point of a model. The basic idea of this method is that if two structures have similar displacement, then the displacement ratio of a prototype and a model displacement, in the same direction at any corresponding point, is invarient. Therefore, determination of a scaling factor can be achieved from any single corresponding point. Energy theorem used in this research are:- 1) Conservation of energy theorem and 2) Castigliano 2nd theorem. The approach was verified with a problem having an exact solution, i.e. truss and beam. Verification shown that the scaling factor obtained are correct.

1. บทนำ

ในงานวิศวกรรมหลายแขนง เช่น กลศาสตร์ของไหล [1], งานโครงสร้างด้านวิศวกรรมโยธา [2] เป็นต้น การศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างจริงผ่านแบบจำลอง (model) เป็นเทคนิคที่รู้จักกันดี และยังคงมีใช้งานอยู่ถึงปัจจุบันนี้ การศึกษาผ่านแบบจำลองเกิดขึ้นเพื่อลดความเสี่ยงของการก่อสร้างโครงสร้างจริงที่มีความซับซ้อนจากผลการคำนวณเท่านั้น ทั้งนี้เนื่องจากสมการควบคุม (governing equation) ที่ใช้ออกแบบอาจไม่ครอบคลุมปัจจัยที่มีผลกระทบต่อผลการออกแบบได้ครบถ้วน นอกจากนี้ การศึกษาแบบจำลองช่วยลดค่าใช้จ่ายในการทดสอบกับชิ้นงานหรือโครงสร้างขนาดเท่าของจริง อย่างไรก็ดีการสร้างแบบจำลองจำเป็นต้องมีกฎเกณฑ์ที่รัดกุมเพื่อให้ผลการทดลองจากแบบจำลองสามารถใช้ตีความสิ่งที่จะเกิดขึ้นกับโครงสร้างจริงได้อย่างแม่นยำ

องค์ประกอบสำคัญในการทำนายผลที่จะเกิดกับโครงสร้างจริงโดยอาศัยข้อมูลจากแบบจำลองนั้นก็คือ ตัวประกอบมาตราส่วน (scaling factor) ตัวประกอบนี้เป็นค่าคงที่ที่แสดงอัตราส่วนระหว่างตัวแปรของโครงสร้างจริง (ต่อไปจะเรียกว่า ต้นแบบ (prototype)) และตัวแปรของแบบจำลองที่สมนัย (correspond) กัน ยกตัวอย่างเช่น ความยาวของชิ้นส่วนในต้นแบบแทนด้วย L_p และความยาวของชิ้นส่วนในแบบจำลองแทนด้วย L_m แล้ว เราอาจนิยามตัวประกอบมาตราส่วนของตัวแปรความยาว C_L เป็น $C_L \equiv L_p / L_m$ หรือ $C_L \equiv L_m / L_p$ ก็ได้ แต่สำหรับงานวิจัยนี้จะใช้นิยามแรก เพราะให้ความรู้สึกว่าแบบจำลองมีขนาดเล็กกว่าต้นแบบ

Kline [3] จำแนกการหาตัวประกอบมาตราส่วนออกเป็น 3 วิธี วิธีแรกใช้การวิเคราะห์มิติ (dimensional analysis) เพื่อสร้างกลุ่มตัวแปรไร้มิติ (dimensionless groups) ความคล้ายระหว่างต้นแบบและแบบจำลองเกิดขึ้นเมื่อกลุ่มตัวแปรไร้มิติทั้งหมดของต้นแบบและแบบจำลองมีค่าเท่ากัน วิธีที่สอง วิธีความคล้าย (method of similitude) ในวิธีนี้กลุ่มตัวแปรไร้หน่วยจะถูกสร้างจากอัตราส่วนของแรง (force ratio) หรืออัตราส่วนพลังงาน (energy ratio) ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา วิธีที่สามคือ วิธีวิเคราะห์สมการควบคุม (governing equation) ซึ่งแบ่งย่อยได้อีก 2 วิธี คือ การนอร์มัลไลซ์สมการควบคุมเพื่อหากลุ่มตัวแปรไร้หน่วย

และ การแทนตัวแปรของต้นแบบในรูปของผลคูณระหว่างตัวประกอบมาตราส่วนที่สมนัยกับตัวแปรของแบบจำลองลงในสมการควบคุมแล้วบังคับให้สมการควบคุมของแบบจำลองเหมือนกับสมการควบคุมของต้นแบบเพื่อหากลุ่มตัวแปรไร้หน่วย

วิธีวิเคราะห์มิติมีจุดอ่อนตรงกลุ่มตัวแปรไร้มิติที่ได้มีรูปแบบได้หลากหลายและกลุ่มตัวแปรไร้มิติก็ไม่ได้แสดงความหมายทางกายภาพออกมาชัดเจนด้วยตัวเอง สำหรับวิธีที่สองนั้นมีข้อได้เปรียบตรงที่อัตราส่วนของแรง (หรือพลังงาน) ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้นต่างมีความหมายทางกายภาพอยู่แล้วทำให้กลุ่มตัวแปรไร้มิติที่ได้จากการนำแรงต่างชนิดกันมาหาอัตราส่วนกันนั้นจะมีความหมายทางกายภาพติดอยู่ อย่างไรก็ดีถ้าปัญหามีแรง (หรือพลังงาน) ที่เกี่ยวข้องอยู่เป็นจำนวนมากจำนวนกลุ่มตัวแปรไร้มิติที่เป็นไปได้ก็จะเพิ่มขึ้นทำให้ยังมีความหลากหลายของผลลัพธ์ที่นำไปใช้งาน วิธีที่สามซึ่งสมการควบคุมนั้นให้กลุ่มตัวแปรไร้มิติที่แน่นอนกว่าสองวิธีแรกอย่างมาก

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีหาตัวประกอบมาตราส่วนอีกวิธีหนึ่งโดยไม่ใช้สมการควบคุม และการประยุกต์กับโครงสร้างชนิดโครงถัก (truss) และ คาน (beam) ที่รับภาระชนิดต่าง ๆ

2. ทฤษฎี

หัวข้อนี้แสดงขั้นตอนการหากฎมาตราส่วน (scaling law) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า เงื่อนไขที่ทำให้ต้นแบบและแบบจำลองมีความคล้ายกันในด้านระยะเคลื่อนตัว (deformation similarity) โดยกฎมาตราส่วนนี้จะใช้หาตัวประกอบมาตราส่วนของระยะเคลื่อนตัวของต้นแบบและแบบจำลองต่อไป

เมื่อวัตถุที่เสียรูปได้ (deformable body) ถูกแรงภายนอกกระทำวัตถุจะมีพลังงานความเครียด (strain energy) U เกิดขึ้นภายในก้อนวัตถุ โดยพลังงานนี้สามารถเขียนในรูปของตัวแปรทางเรขาคณิต และตัวแปรทางกายภาพของวัตถุ X_i ได้ดังนี้

$$U = U(X_i), \qquad i = 1,2\ldots n \qquad (1)$$

หากพิจารณาต้นแบบและแบบจำลองซึ่งตัวแปรของระบบทั้งสองสัมพันธ์กันตามสมการ

$$X_{pi} = C_i X_{mi}, \qquad i = 1,2\ldots n \qquad (2)$$

โดย X_{pi} คือ ตัวแปรของต้นแบบ

X_{mi} คือ ตัวแปรของแบบจำลอง

C_i คือ มาตราส่วนระหว่างตัวแปรของต้นแบบ และแบบจำลอง (ค่าคงตัว)

แทนสมการที่ (2) ลงในสมการที่ (1) จะได้ พลังงานความเครียดของต้นแบบคือ

$$U_p = U(X_{pi})$$

หากสมการมีมิติเป็นเนื้อเดียวกัน (dimensional homogeneity) แล้ว [4]

$$U(X_{pi}) = \varphi(C_i)U(X_{mi}) \qquad (3)$$

โดย $\varphi(C_i)$ คือ พจน์ที่ประกอบด้วยค่าคงตัวมาตราส่วน

หากพิจารณาสมการที่ (3) จะเห็นว่าพลังงานความเครียดของต้นแบบและแบบจำลองจะเท่ากันก็ต่อเมื่อ $\varphi(C_i) = 1$ อย่างไรก็ดี การที่ระบบทั้งสองมีพลังงานความเครียดเท่ากันนั้นยังไม่เพียงพอที่จะสรุปว่าระบบทั้งสองมีความคล้ายกัน

จากทฤษฎีบทการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy theorem) [5] เราทราบว่า หากไม่คิดการสูญเสียพลังงานเนื่องจากความร้อนและปฏิกิริยาเคมีแล้ว งานของแรงภายนอก W จะเท่ากับพลังงานความเครียดที่สะสมอยู่ในเนื้อวัตถุ U

งานของแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุต้นแบบ คือ

$$W_p = W(X_{pi})$$

หากสมการมีมิติเป็นเนื้อเดียวกันแล้ว

$$W(X_{pi}) = \chi(C_i)W(X_{mi}) \qquad (4)$$

แทนสมการที่ (4) ลงในสมการที่ (3) จะได้

$$\chi(C_i)W(X_{mi}) = \varphi(C_i)U(X_{mi})$$

จากทฤษฎีบทอนุรักษ์พลังงาน

$$W(X_{mi}) = U(X_{mi})$$

ดังนั้น เงื่อนไขที่ทำให้ต้นแบบและแบบจำลองมีความคล้ายกัน คือ

$$\varphi(C_i) = \chi(C_i) \qquad (5)$$

หากพิจารณาสมการที่ (4) โดยแยกพจน์มาตราส่วนของระยะเคลื่อนตัว ณ จุดที่แรงภายนอกกระทำ C_Δ ออกจากพจน์ $\chi(C_i)$ จะเขียน $\chi(C_i)$ ได้ใหม่ในรูปของ

$$\chi(C_i) = C_\Delta \chi'(C_i), \qquad i = 1\ldots n-1 \qquad (6)$$

แทนสมการที่ (6) ลงในสมการที่ (5) จะได้ตัวประกอบมาตราส่วนของระยะเคลื่อนตัวในต้นแบบ Δ_p และแบบจำลอง Δ_m ณ จุดที่แรงภายนอกกระทำคือ

$$C_\Delta \equiv \frac{\Delta_p}{\Delta_m} = \frac{\varphi(C_i)}{\chi'(C_i)} \qquad (7)$$

จากสมการที่ (7) จะเห็นว่าตัวประกอบมาตราส่วนมีค่าคงที่ ณ จุดใด ๆ ในวัตถุ ดังนั้นต้นแบบ และแบบจำลองจึงมีความคล้ายกันด้านระยะเคลื่อนตัว อย่างไรก็ดี ตัวประกอบมาตราส่วนที่แสดงในสมการที่ (7) มีข้อจำกัดตรงที่ใช้กับวัตถุที่อยู่ภายใต้ภาระกระทำที่จุด (point load) หรือโมเมนต์กระทำที่จุด (point moment) เพียงหนึ่งจุดได้เท่านั้น การปรับปรุงขั้นตอนเพื่อให้สามารถหาตัวประกอบมาตราส่วนได้ครอบคลุมยิ่งขึ้นต้องใช้ทฤษฎีบทพลังงานบทอื่น เช่น ทฤษฎีบทงานเสมือน (virtual work theorem) หรือ ทฤษฎีบทของ Castigliano เป็นต้น

งานวิจัยนี้เลือกใช้ทฤษฎีบทที่ 2 ของ Castigliano เพราะสามารถหาตัวประกอบมาตราส่วนระยะเคลื่อนตัวได้โดยตรงและมีขั้นตอนการคำนวณน้อยกว่าการใช้ทฤษฎีบทงานเสมือน ทฤษฎีบทที่ 2 ของ Castigliano กล่าวว่า ระยะเคลื่อนตัวในทิศทางเดียวกันกับภาระ Q ณ จุดที่ภาระ Q กระทำ (ในที่นี้ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\Delta|_Q$) จะเท่ากับ

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งของพลังงานความเครียด U เทียบกับภาระ Q หรือเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$\Delta\big|_Q = \frac{\partial U}{\partial Q} \tag{8}$$

ระยะเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่งที่ภาระ Q_p กระทำของต้นแบบหาได้จาก

$$\Delta_p\big|_{Q_p} = \frac{\partial U(X_{pi})}{\partial Q_p} \tag{9}$$

จากสมการที่ (3) และกำหนดให้มาตราส่วนของภาระ Q ของต้นแบบและของแบบจำลองสัมพันธ์กันตามสมการ

$$Q_p = C_Q Q_m \tag{10}$$

แทนสมการที่ (10) ลงในสมการที่ (9) จะได้

$$\Delta_p\big|_{Q_p} = \frac{\varphi(C_i)}{C_Q}\frac{\partial U(X_{mi})}{\partial Q_m}$$

จัดรูปสมการเพื่อหามาตราส่วนระยะเคลื่อนตัว จะได้

$$C_\Delta \equiv \frac{\Delta_p\big|_{Q_p}}{\Delta_m\big|_{Q_m}} = \frac{\varphi(C_i)}{C_Q} \tag{11}$$

3. ตัวประกอบมาตราส่วนสำหรับชิ้นส่วนที่รับภาระแนวแกน

ในหัวข้อนี้จะประยุกต์แนวคิดของการหาตัวประกอบมาตราส่วนด้วยทฤษฎีบทพลังงานกับโครงสร้างที่ชิ้นส่วนรับภาระแนวแกน โดยพิจารณากรณีโครงสร้างที่มีชิ้นส่วนชิ้นเดียว โครงถักที่ถูกแรงภายนอกกระทำ 1 แรง และโครงถักที่ถูกแรงภายนอกกระทำมากกว่าหนึ่งแรง

3.1 ชิ้นส่วนเดี่ยวรับภาระแนวแกน

พลังงานความเครียดของชิ้นส่วนรับภาระแนวแกนในรูปที่ 1 [5] คือ

$$U = \int_0^L \frac{N^2}{2EA}dx$$

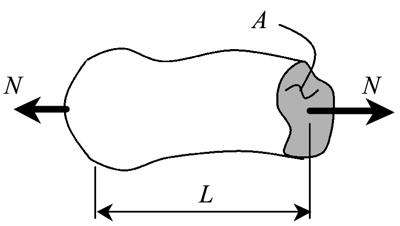
โดย N คือ แรงภายในชิ้นส่วน

E คือ โมดูลัสของความยืดหยุ่น

A คือ พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน

สำหรับต้นแบบจะเติมตัวห้อย “p” กับตัวแปรทั้งหมด ดังนั้นพลังงานความเครียดของชิ้นส่วนต้นแบบ คือ

$$U_p = \int_0^{L_p} \frac{N_p^{\ 2}}{2E_p A_p}dx_p \tag{12}$$



รูปที่ 1 ชิ้นส่วนรับภาระแนวแกน

กำหนดตัวประกอบมาตราส่วนระหว่างตัวแปรของต้นแบบ และแบบจำลอง ดังนี้

$$N_p = C_N N_m \tag{13ก}$$

$$A_p = C_A A_m \tag{13ข}$$

$$E_p = C_E E_m \tag{13ค}$$

$$L_p = C_L L_m \tag{13ง}$$

แทนสมการที่ (13ก) – (13ข) ลงในสมการ (12) จะได้

$$U_p = \int_0^{C_L L_m} \frac{C_N^{\ 2} N_m^{\ 2}}{2C_E E_m C_A A_m}dx_p$$

$$U_p = \frac{C_N^{\ 2}}{C_E C_A}\int_0^{C_L L_m} \frac{N_m^{\ 2}}{E_m A_m}dx_p$$

ให้ $x_p = C_L x_m$ ดังนั้น $dx_p = C_L dx_m$ จะได้

$$U_p = \frac{C_N^{\ 2} C_L}{C_E C_A}\int_0^{L_m} \frac{N_m^{\ 2}}{E_m A_m}dx_m \tag{14}$$

เมื่อเทียบกับสมการที่ (3) แล้วจะได้พจน์ของตัวประกอบมาตราส่วน คือ

$$\varphi(C_i) = \frac{C_N^{\ 2} C_L}{C_E C_A} \tag{15}$$

ต่อไป พิจารณางานของแรงภายนอกของชิ้นส่วนต้นแบบ

$$W_p = \frac{1}{2}P_p\Delta_p$$

กำหนด

$$P_p = C_P P_m$$

และ

$$\Delta_p = C_\Delta \Delta_m$$

แทนลงในเงื่อนไข (5) จะได้

$$W_p = \frac{1}{2}C_P P_m C_\Delta \Delta_m$$

เมื่อเทียบกับสมการที่ (4) จะได้พจน์ของตัวประกอบมาตราส่วน คือ

$$\chi(C_i) = C_P C_\Delta \tag{16}$$

จากสมการที่ (5) ชิ้นส่วนทั้งสองจะมีความคล้ายกันก็ต่อเมื่อพจน์ตัวประกอบมาตราส่วน (สมการที่ (15) และ (16)) เท่ากัน

$$C_P C_\Delta = \frac{C_N^{\ 2} C_L}{C_E C_A}$$

ดังนั้น

$$C_\Delta = \frac{C_N^{\ 2} C_L}{C_P C_E C_A} \tag{17}$$

อย่างไรก็ดี สำหรับวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic material) แรงภายใน N จะแปรผันโดยตรงกับแรงภายนอก P ดังนั้น $C_N = C_P$ จะได้ตัวประกอบมาตราส่วนของระยะเคลื่อนตัว คือ

$$C_\Delta = \frac{C_P C_L}{C_E C_A} \tag{18}$$

3.2 โครงถักรับแรงกระทำที่จุดจำนวนหนึ่งแรง

พิจารณาโครงถักต้นแบบที่มีจำนวนชิ้นส่วน n ชิ้น แต่ละชิ้นมีขนาดหน้าตัดสม่ำเสมอตลอดความยาวเท่ากับ A_{pj} , $j=1\ldots n$ ความยาวของแต่ละชิ้น เท่ากับ L_{pj} และแต่ละชิ้นทำจากวัสดุที่มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น เท่ากับ E_{pj} ดังนั้น พลังงานความเครียดของโครงถักต้นแบบ คือ

$$U_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{N_{pj}^{\ 2}}{2E_{pj}A_{pj}} \tag{19}$$

โดย N_{pj} คือ แรงภายในของชิ้นส่วนชิ้นที่ j ซึ่งจะเป็นฟังก์ชันของแรงภายนอก P_p

กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรของโครงถักต้นแบบ และโครงถักจำลองดังนี้

$$N_{pj} = C_P N_{mj} \tag{20ก}$$

$$E_{pj} = C_E E_{mj} \tag{20ข}$$

$$A_{pj} = C_A A_{mj} \tag{20ค}$$

แทนสมการที่ (20ก) ถึง (20ค) ลงในสมการที่ (19) และจัดรูปจะได้พจน์ตัวประกอบมาตราส่วน คือ

$$\varphi(C_i) = \frac{C_P^{\ 2}}{C_E C_A} \tag{21}$$

สำหรับการวิเคราะห์งานของแรงภายนอกจะได้พจน์ของตัวประกอบมาตราส่วน คือ

$$\chi(C_i) = C_P C_\Delta \tag{22}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (5), (21) และ (22) จะได้

$$C_\Delta = \frac{C_P C_L}{C_E C_A} \tag{23}$$

ซึ่งแสดงว่าตัวประกอบมาตราส่วนของชิ้นส่วนที่รับภาระแนวแกนนั้นไม่ขึ้นกับลักษณะของโครงถักและลักษณะของรองรับ

3.3 โครงถักรับแรงกระทำที่จุดจำนวนมากกว่าหนึ่งแรง

ในกรณีนี้แรงภายในของโครงสร้างสามารถเขียนในรูปการซ้อนทับเชิงเส้นของแรงภายนอกกระทำที่จุด ได้ดังนี้

$$N_j = \sum_{k=1}^{m} a_k P_k \tag{24}$$

โดย N_j คือ แรงภายในของชิ้นส่วนโครงถัก ลำดับที่ j

P_k คือ แรงภายนอก ลำดับที่ k

a_k คือ สัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า

ระยะเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่ง s ในทิศทางของแรง P_s จะหาได้จาก

$$\Delta_p\big|_s = \sum_{j=1}^{n} N_{pj} \frac{\partial N_{pj}}{\partial P_s} \frac{L_{pj}}{E_{pj}A_{pj}} \tag{25}$$

แทนสมการ (24) ลงในสมการที่ (25) โดยเพิ่มตัวห้อย "p" เพื่อเน้นว่าเป็นตัวแปรของต้นแบบ จะได้

$$\Delta_p\big|_s = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{m} a_k P_{pk}\right) a_s \frac{L_{pj}}{E_{pj}A_{pj}}\right] \tag{26}$$

กำหนดตัวประกอบมาตราส่วนระหว่างตัวแปรของต้นแบบและของแบบจำลอง ดังต่อไปนี้

$$P_{pk} = C_P P_{mk}, \qquad k = 1,2\ldots m \tag{27ก}$$

$$L_{pj} = C_L L_{mj}, \qquad j = 1,2\ldots n \tag{27ข}$$

$$E_{pj} = C_E E_{mj}, \qquad j = 1,2\ldots n \tag{27ค}$$

$$A_{pj} = C_A A_{mj}, \qquad j = 1,2\ldots n \tag{27ง}$$

แทนสมการที่ (27ก) ถึง (27ง) ลงในสมการที่ (26) และจัดรูปเพื่อหา C_Δ จะได้

$$C_\Delta \equiv \frac{\Delta_p\big|_s}{\Delta_m\big|_s} = \frac{C_p C_L}{C_E C_A} \tag{28}$$

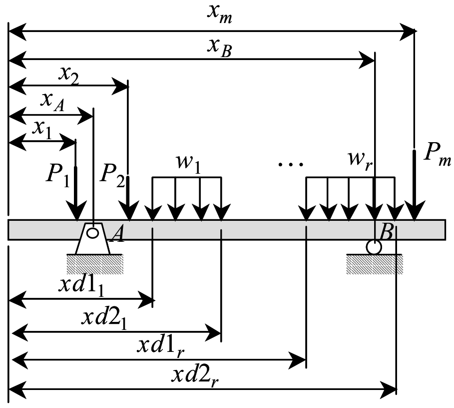
ผลลัพธ์ที่ได้แสดงให้เห็นว่าตัวประกอบมาตราส่วนไม่ขึ้นกับจำนวนของแรง และยังไม่ขึ้นกับตำแหน่งของแรงที่ใช้หาระยะเคลื่อนตัว กล่าวคือตัวประกอบมาตราส่วนของระยะเคลื่อนตัวทุกจุดในโครงสร้างเท่ากัน

4. ตัวประกอบมาตราส่วนสำหรับชิ้นส่วนที่รับโมเมนต์ดัด

ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างการหาตัวประกอบมาตราส่วนของระยะเคลื่อนตัวของคานแบบรองรับอย่างง่าย (simply supported beam) ซึ่งอยู่ภายใต้ภาระกระทำที่จุด P_j , $j=1\ldots m$ และภาระกระจายสม่ำเสมอ (uniformly distributed load) w_k , $k=1\ldots r$ ดังแสดงในรูปที่ 2 จากรูป ระยะ x_j , $j=1\ldots m$ คือตำแหน่งของภาระกระทำที่จุดแต่ละแรง และระยะ $xd1_k$ และ $xd2_k$, $k=1\ldots r$ คือตำแหน่งเริ่มต้นและสิ้นสุดของภาระกระจายสม่ำเสมอ

แรงปฏิกิริยา ณ จุดรองรับ ในคานต้นแบบ คือ

$$R_{pA} = \frac{\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{j=1}^{m} P_{pj}\left(x_{pj}-x_{pB}\right)+ \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{r} w_{pk}\left(xd2_{pk}-xd1_{pk}\right)\left(\frac{xd2_{pk}+xd1_{pk}}{2}-x_{pB}\right)\end{array}\right]}{\left(x_{pB}-x_{pA}\right)} \tag{29ก}$$



รูปที่ 2 คานแบบรองรับอย่างง่ายภายใต้ภาระกระทำที่จุด และภาระ

กระจายสม่ำเสมอ

$$R_{pB}=\frac{\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{m}P_{pj}\left(x_{pj}-x_{pA}\right)+\\ \sum_{k=1}^{r}w_{pk}\left(xd2_{pk}-xd1_{pk}\right)\left(\frac{xd2_{pk}+xd1_{pk}}{2}-x_{pB}\right)\end{bmatrix}}{\left(x_{pA}-x_{pB}\right)} \quad (29ข)$$

การกระจายของโมเมนต์ดัดในคานต้นแบบ คือ

$$\begin{aligned}M_p\left(x_p\right)&=R_{Ap}\left\langle x_p-x_{pA}\right\rangle+R_{Bp}\left\langle x_p-x_{pB}\right\rangle\\ &+\sum_{j=1}^{m}P_{pj}\left\langle x_p-x_{pj}\right\rangle+\sum_{k=1}^{r}w_{pk}\left[\frac{\left\langle x_p-xd1_{pk}\right\rangle\left(x_p-xd1_{pk}\right)}{2}\right.\\ &\left.-\frac{\left\langle x_p-xd2_{pk}\right\rangle\left(x_p-xd2_{pk}\right)}{2}\right]\end{aligned} \quad (30)$$

แทนสมการที่ (29ก) และ (29ข) ลงในสมการที่ (30) แล้วหาอนุพันธ์เทียบกับภาระ P ลำดับที่ s หรือ P_s จะได้

$$\frac{\partial M_p}{\partial P_{ps}}=\frac{\left(x_{ps}-x_{pB}\right)}{\left(x_{pB}-x_{pA}\right)}\left\langle x_p-x_{pA}\right\rangle-\frac{\left(x_{ps}-x_{pA}\right)}{\left(x_{pB}-x_{pA}\right)}\left\langle x_p-x_{pB}\right\rangle+\left\langle x_p-x_{ps}\right\rangle \quad (31)$$

ระยะเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่ง s ในทิศทางของแรง P_{ps} จะหาได้จาก

$$\Delta_p\big|_s=\int_0^{L_p}\frac{M_p}{E_pI_p}\frac{\partial M_p}{\partial P_{ps}}dx_p \quad (32)$$

กำหนดตัวประกอบมาตราส่วนระหว่างตัวแปรของต้นแบบ และแบบจำลอง ดังต่อไปนี้

$$P_{pj}=C_PP_{mj},\quad j=1,2\ldots m \quad (33ก)$$

$$w_{pk}=C_ww_{mk},\ k=1,2\ldots r \quad (33ข)$$

$$I_p=C_II_m \quad (33ค)$$

$$E_p=C_EE_m \quad (33ง)$$

$$L_p=C_LL_m \quad (33จ)$$

แทนสมการที่ (33ก) ถึง (33จ) ลงในสมการที่ (32) และจัดรูป จะได้

$$\Delta_p\big|_s=\frac{C_PC_L{}^3}{C_EC_I}\Delta_{m,point}\big|_s+\frac{C_wC_L{}^4}{C_EC_I}\Delta_{m,distribute}\big|_s \quad (34)$$

โดย $\Delta_{m,point}\big|_s$ และ $\Delta_{m,distribute}\big|_s$ คือ ระยะเคลื่อนตัวของแบบจำลองในทิศทางของแรง P ลำดับที่ s ณ จุดที่แรงกระทำ เนื่องจากภาระกระทำที่จุด และภาระกระจายสม่ำเสมอ ตามลำดับ

จากผลลัพธ์ที่ได้พบว่า มีประเด็นน่าสนใจ 3 ประการดังนี้

1) เมื่อคานต้นแบบรับภาระกระทำที่จุด และภาระกระจายสม่ำเสมอ การกำหนดตัวประกอบมาตราส่วนให้กับตัวแปรของปัญหายังคงทำได้โดยอิสระเช่นเดิม แต่ว่าในการทดลองวัดระยะเคลื่อนตัว (หรือระยะแอ่นตัว) ของคานที่จำลองมา จะต้องแยกทำกรณีภาระกระทำเป็นจุด เพื่อให้ได้ $\Delta_{m,point}\big|_s$ และกรณีภาระกระจายสม่ำเสมอ เพื่อให้ได้ $\Delta_{m,distribute}\big|_s$ เนื่องจากตัวประกอบมาตราส่วนของระยะเคลื่อนตัวภายใต้ภาระสองชนิดนี้แตกต่างกัน
2) ถ้ากำหนดตัวประกอบมาตราส่วนทั้งหมดให้มีค่าเท่ากับ 1 แล้ว หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งคือให้แบบจำลองคานมีลักษณะเหมือนกับคานต้นแบบ ทุกประการแล้ว เทอมทางขวามือของสมการที่ (34) แสดงถึงการซ้อนทับผลเฉลยระยะเคลื่อนตัวเนื่องจากภาระแต่ละชนิด
3) ตัวประกอบมาตราส่วนที่ได้ขึ้นกับเงื่อนไขขอบเขตเปลี่ยนไป (boundary condition) หรือไม่ เราสามารถหาคำตอบได้โดยการวิเคราะห์ต่อไปนี้ ถ้ารองรับไม่ใช้รองรับแบบง่ายแล้วจะมีโมเมนต์ดัดเกิดที่คาน ณ ตำแหน่งรองรับ โดยจะเป็นฟังก์ชันของขนาดและตำแหน่งของภาระกระทำเป็นจุด และ ขนาดและตำแหน่งของภาระกระจายสม่ำเสมอ โมเมนต์ที่จุดรองรับนี้จะเป็นเทอมที่เพิ่มเข้าไปในสมการที่ (30) ซึ่งสามารถแยกออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มโมเมนต์ที่จุดรองรับเนื่องจากแรงกระทำเป็นจุด และกลุ่มเนื่องจากแรงกระจายสม่ำเสมอได้ ดังนั้นเมื่อดำเนินการตามขั้นตอนที่ผ่านมาจะได้ผลลัพธ์รูปเดียวกับสมการที่ (34) กล่าวคือ ตัวประกอบมาตราส่วนที่ได้นี้ไม่ขึ้นกับชนิดของรองรับ (หรือเงื่อนไขขอบเขต)

จากสมการที่ (34) ตัวประกอบมาตราส่วนสำหรับภาระกระทำเป็นจุด คือ

$$C_\Delta=\frac{C_PC_L{}^3}{C_IC_E} \quad (35)$$

และสำหรับภาระกระจายสม่ำเสมอ คือ

$$C_\Delta=\frac{C_wC_L{}^4}{C_IC_E} \quad (36)$$

5. ตัวอย่าง

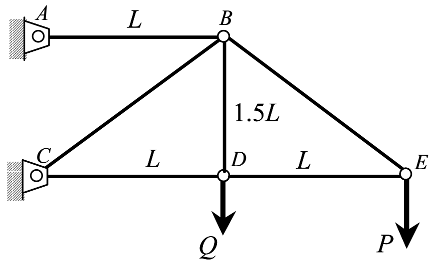
ในหัวข้อนี้จะทวนสอบความถูกต้องของตัวประกอบมาตราส่วนที่สร้างขึ้นในหัวข้อที่ 3 และ 4 ด้วยตัวอย่างลักษณะเดียวกัน ขั้นตอนการทวนสอบ มีดังนี้

1) คำนวณขนาดของระยะเคลื่อนตัวในแบบจำลองจากผลเฉลยแม่นตรงของปัญหา จะถือว่าเป็นผลการทดสอบแบบจำลอง
2) คูณระยะเคลื่อนตัวที่ได้ในข้อที่ 1) ด้วยตัวประกอบมาตราส่วนที่เหมาะสม
3) เปรียบเทียบผลการคำนวณในข้อ 2) กับผลการคำนวณระยะเคลื่อนตัวของต้นแบบจากผลเฉลยแม่นตรง หากผลการคำนวณตรงกันจะหมายความว่าตัวประกอบมาตราส่วนที่ได้มีความถูกต้อง

5.1 ตัวอย่างที่ 1 : โครงถักรับภาระกระทำที่จุดจำนวนสองภาระ

รูปที่ 3 แสดงโครงถักภายใต้ภาระกระทำที่จุด P และ Q โดยมิติความยาวของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นแสดงอยู่ในรูป ผลเฉลยแม่นตรงสำหรับระยะเคลื่อนตัวที่จุด D ตามแนวแรง Q คือ

$$\Delta\big|_D=\frac{\frac{16}{9}\left(Q+2P\right)}{A_{AB}E_{AB}}L_{AB}+\frac{\frac{25}{9}\left(Q+P\right)}{A_{BC}E_{BC}}L_{BC}+\frac{QL_{BD}}{A_{BD}E_{BD}} \quad (37)$$



รูปที่ 3 โครงถักรับภาระกระทำที่จุดจำนวนสองภาระ

กำหนดค่าตัวแปรสำหรับแบบจำลองดังนี้

$L_{mAB} = L_{mCD} = L_{mDE} = 0.2$ เมตร, $L_{mBD} = 0.3$ เมตร,

$L_{mBC} = L_{mBE} = \sqrt{0.2^2 + 0.3^2} = 0.36$ เมตร

$E_{mAB} = E_{mCD} = E_{mDE} = E_{mBD} = E_{mBC} = E_{mBE} = 70\times10^9$ ปาสคาล

$A_{mAB} = A_{mBD} = A_{mBE} = 25$ มม^2

$A_{mBC} = A_{mCD} = A_{mDE} = 150$ มม^2

$P_m = 1{,}000$ นิวตัน, $Q_m = 500$ นิวตัน

กำหนดค่าตัวแปรสำหรับต้นแบบดังนี้

$L_{pAB} = L_{pCD} = L_{pDE} = 2$ เมตร, $L_{pBD} = 3$ เมตร,

$L_{pBC} = L_{pBE} = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3.61$ เมตร

$E_{pAB} = E_{pCD} = E_{pDE} = E_{pBD} = E_{pBC} = E_{pBE} = 200\times10^9$ ปาสคาล

$A_{pAB} = A_{pBD} = A_{pBE} = 150$ มม^2

$A_{pBC} = A_{pCD} = A_{pDE} = 900$ มม^2

$P_p = 10{,}000$ นิวตัน, $Q_p = 5{,}000$ นิวตัน

1) ระยะเคลื่อนตัวที่จุด D ของแบบจำลอง คือ 0.737 มม
2) ตัวประกอบมาตราส่วนจากโจทย์คือ

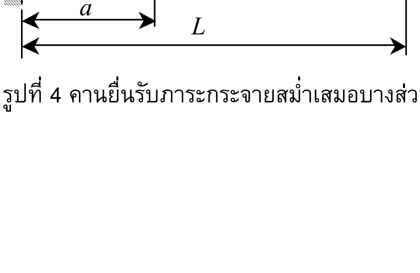
$$C_L = 10\,, C_E = \frac{200}{70}\,,\ C_A = 6\,,\ C_P = 10 \text{ ดังนั้น}$$

$$C_\Delta = \frac{C_P C_L}{C_A C_E} = \frac{10\times10}{6\times\frac{200}{70}} = 5.83$$

3) ระยะเคลื่อนตัวที่จุด D ของต้นแบบจากผลเฉลยแม่นตรง คือ 4.30 มม และที่ทำนายโดยตัวประกอบมาตราส่วนคือ $5.83\times0.737 = 4.30$ มม ดังนั้นตัวประกอบมาตราส่วนในสมการที่ (28) จึงถูกต้อง

5.2 ตัวอย่างที่ 2 : คานยื่นรับภาระกระจายสม่ำเสมอบางส่วน

รูปที่ 4 แสดงคานยื่น (cantilever beam) ความยาว L รับภาระกระจายสม่ำเสมอ w จากปลายยึดเป็นระยะ a ผลเฉลยแม่นตรงสำหรับระยะเคลื่อนตัวแนวดิ่งที่จุด A คือ



รูปที่ 4 คานยื่นรับภาระกระจายสม่ำเสมอบางส่วน

$$\Delta\big|_A = \frac{wa^3L}{6} - \frac{wa^4}{24} \tag{38}$$

กำหนดค่าตัวแปรสำหรับแบบจำลองคานดังนี้

$L_m = 1$ เมตร, $a_m = 0.4$ เมตร, $E_m = 70\times10^9$ ปาสคาล $I_m = 2.81\times10^{-5}$ เมตร^4 และ $w_m = 5{,}000$ นิวตันต่อเมตร

กำหนดค่าตัวแปรสำหรับคานต้นแบบดังนี้

$L_p = 10$ เมตร, $a_p = 4$ เมตร, $E_p = 200\times10^9$ ปาสคาล $I_p = 3.375\times10^{-4}$ เมตร^4 และ $w_p = 10{,}000$ นิวตันต่อเมตร

1) ระยะเคลื่อนตัวที่จุด A ของแบบจำลอง คือ 0.0244 มม
2) ตัวประกอบมาตราส่วนจากโจทย์คือ

$$C_L = 10\,, C_E = \frac{200}{70}\,,\ C_I = 12\,,\ C_w = 2 \text{ ดังนั้น}$$

$$C_\Delta = \frac{C_w C_L^{\,4}}{C_I C_E} = \frac{2\times10^4}{12\times\frac{200}{70}} = 583.3$$

3) ระยะเคลื่อนตัวที่จุด A ของต้นแบบที่คำนวณจากผลเฉลยแม่นตรง คือ 14.22 มม และที่ทำนายโดยตัวประกอบมาตราส่วนคือ $583.3\times0.0244 = 14.22$ มม โดยความแตกต่างมาจากความผิดพลาดเชิงตัวเลขเนื่องจากการปัดเศษ ดังนั้นตัวประกอบมาตราส่วนในสมการที่ (36) จึงถูกต้อง

6. สรุป

งานวิจัยได้นำเสนอขั้นตอนทั่วไปในการหาตัวประกอบมาตราส่วนของระยะเคลื่อนตัวโดยใช้ทฤษฎีพลังงาน จากนั้นได้นำขั้นตอนไปประยุกต์กับชิ้นส่วน และโครงสร้างที่รับภาระแนวแกน และภาระดัดตามลำดับ สุดท้ายได้ทวนสอบกับปัญหาที่ทราบผลเฉลยแม่นตรง ผลการวิเคราะห์พบว่า รูปแบบของตัวประกอบมาตราส่วนขึ้นกับลักษณะของภาระที่กระทำกับชิ้นส่วน แต่ไม่ขึ้นกับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา อย่างไรก็ดี เงื่อนไขขอบเขตของต้นแบบ และแบบจำลองจะต้องเหมือนกันเพื่อให้ตัวประกอบมาตราส่วนประยุกต์ใช้ได้

เอกสารอ้างอิง

[1] Fox, R.W., and McDonald, A.T. “Introduction to Fluid Mechanics 4eds”, John Wiley & Sons, 1994, pp. 271-272.

[2] Preece, B.W., and Davies, J.D. “Models for Structural Concrete”, CR Books Limited, 1966.

[3] Kline, S.J. “Similitude and Approximation Theory”, McGraw-Hill, 1965, pp.202-219.

[4] Skoglund, V.J. “Similitude: Theory and Applications”, International Textbook Company, 1967, pp. 45.

[5] Hibbeler, R.C. “Mechanics of Materials”, Macmillan Publishing Company. 1991, pp. 690.