การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 17
15-17 ตุลาคม 2546 จังหวัดปราจีนบุรี

การคำนวณจุดข้อมูลบนเส้นรอบรูปของหน้าตัดรูปทรง 3 มิติ

Calculation of Coordinate on Section Contour for Three Dimensional Models

สดุดี นฤภัย[1], อุดมเกียรติ นนทแก้ว[2], ธนู ฉุยฉาย[3]
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
1518 ถ.พิบูลสงคราม เขตบางซื่อ กรุงเทพฯ 10800
โทร 0-29132500 ต่อ 8303 โทรสาร 0-25870026 กด 111 E-mail: sadudee_n@hotmail.com[1], unk@kmitnb.ac.th[2], tcc@kmitnb.ac.th[3]

Sadudee Narupai[1], Udomkiat Nontakaew[2], Thanu Chouychai[3]
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok
1518 Pibulsongkram Rd, Bangsue Bangkok 10800 Thailand
Tel: 0-29132500 Ext. 8303 Fax: 0-25870026 press 111 E-mail: sadudee_n@hotmail.com[1], unk@kmitnb.ac.th[2], tcc@kmitnb.ac.th[3]

บทคัดย่อ

การจำลองรูปทรงวัตถุด้วยคอมพิวเตอร์เป็นส่วนที่สำคัญสำหรับการสร้างรูปทรงวัตถุจากข้อมูลการออกแบบหรือการวัดอย่างคร่าวๆ นำมาสร้างข้อมูลที่ละเอียดขึ้นด้วยสมการเส้นโค้ง และผิวของบี-สไปลน์หรือเนิร์ป สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานกับเครื่องสร้างต้นแบบเร็ว ซึ่งต้องการจุดข้อมูลป้อนเข้าเป็นเส้นรอบรูปของหน้าตัดรูปทรงวัตถุ จากรูปทรงวัตถุที่ต้องการตัดและผิวที่นำมาตัดซึ่งผ่านการสร้างข้อมูลที่ละเอียดขึ้นแล้วนั้น โดยกำหนดให้รูปทรงวัตถุประกอบด้วยผิวย่อยๆ มากมาย แต่ละแผ่นผิวประกอบด้วยเส้นโค้ง 4 เส้น สมมติเป็นเส้นตรง ส่วนผิวที่นำมาตัดแบ่งเป็นผิวย่อยๆ สมมติเป็นแผ่นผิวราบ นำเส้นตรงบนรูปทรงวัตถุตัดกับแผ่นผิวราบ ได้ตำแหน่งจุดตัดจัดเรียงเป็นเส้นรอบรูป ทำการตัดทุกๆ เซ็กชั่นของรูปทรงวัตถุเพื่อเป็นจุดข้อมูลป้อนเข้าเครื่องสร้างต้นแบบเร็วต่อไป

Abstract

The simulation of a 3-D object is essential for prototype construction. Through the equations of B-Splines or NURBS curves and surfaces, the rough data points were reconstructed to obtain the finer data. To apply with a rapid prototyping by these new data points, the input data in the cross section contour form of the object is necessary. The contour of a cross section was determined form the intersection between a 3-D model and plane. The object surface is subdivided to the several surfaces, while another surface is subdivided to patches. The subdivided surfaces and patches were assumed to be liner and plane, respectively. The intersection points between the surface on the object model and the plane would form the contour data points of the object cross section. The simulations of a 3-D model give the satisfied results.

1. บทนำ

การออกแบบและจำลองรูปทรงวัตถุด้วยคอมพิวเตอร์นำไปประยุกต์ใช้งานอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะงานการออกแบบผลิตภัณฑ์และงานที่ต้องการสร้างต้นแบบเพื่อการผลิต ทำการออกแบบเก็บข้อมูลโดยคร่าวๆ เพื่อนำไปสร้างข้อมูลที่ละเอียดขึ้น ซึ่งโครงสร้างข้อมูลอยู่บนพื้นฐานรูปทรงวัตถุเดิม ผ่านทางสมการคณิตศาสตร์ โปรแกรมออกแบบทั่วๆ ไปใช้หลักการพื้นฐานคล้ายๆ กัน คือใช้วิธีการสร้างสมการคณิตศาสตร์ (เส้นโค้งและผิวพาราเมตริก) [1-6] แทนรูปทรงของวัตถุ ที่อาจจะอยู่ในรูปของโครงข่ายเส้นโค้งหรือผิวในปริภูมิ 3 มิติ นำหลักการเส้นโค้งและผิวบี-สไปลน์ (B-Splines) [1-5] หรือเนิร์ป (NURBS, Non-Uniform Rational B-Splines) [3] มาสร้างข้อมูล การนำไปประยุกต์ใช้กับเครื่องสร้างต้นแบบเร็ว ซึ่งต้องข้อมูลป้อนเข้าเป็นเส้นรอบรูปแต่ละหน้าตัดของรูปทรงวัตถุ ดังนั้นสามารถหาได้จากการตัดกันของผิว ซึ่งการตัดกันของผิวเป็นปัญหาเบื้องต้นในการออกแบบรูปทรงเรขาคณิต เนื่องจากการตัดคือพื้นฐานของการสร้างรูปทรงที่ซับซ้อนโดยใช้หาตำแหน่งที่ต้องการรวม (Union), เล็ม (trim) หรือตัดนั่นเอง สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างรูปทรงวัตถุ จากข้อมูลคร่าวๆที่ได้จากการวัด นำมาคำนวณสร้างข้อมูลที่ละเอียดขึ้น เพื่อคำนวณหาเส้นรอบรูปจากการตัดกันของผิว โดยใช้ผิวราบตัดผิวรูปทรงวัตถุ ผิวทั้ง 2 ต้องผ่านการสร้างข้อมูลที่ละเอียดขึ้นมาก่อน

2. เนื้อความหลัก

การจำลองรูปทรงวัตถุในงานทางคอมพิวเตอร์กราฟิกความเป็นธรรมชาติของงานคือสิ่งสำคัญ เนื่องจากเป็นการจำลองเพื่อเสนองาน

หรือจะต้องสร้างออกมาเป็นชิ้นงานจริง ดังนั้นการใช้เส้น และผิวที่เรียบเกลาเป็นธรรมชาติมาจำลองจึงเหมาะสม จะอธิบายในรูปสมการคณิตศาสตร์ แบบพาราเมตริก ซึ่งได้รับความนิยมมากกว่าสมการอิมพลิสิท สำหรับการหาผลการแก้สมการสามารถแปรผันค่าพารามิเตอร์เพื่อหาพิกัดตำแหน่งของแต่ละจุด

เส้นโค้ง และผิวพาราเมตริกแบบสไปลน์นิยมนำมาใช้เป็นมูลฐานสำหรับการสร้างรูปทรงวัตถุคือ บี-สไปลน์ และเนิร์ป ซึ่งพื้นฐานของสมการพาราเมตริกแทนเส้นโค้งและผิวกำหนดให้เป็นสมการพหุนาม และเพื่อความสัมพันธ์ของค่าสัมประสิทธิ์กับเรขาคณิตของเส้นโค้ง หรือผิวจึงจัดรูปแบบสมการพหุนามให้อยู่ในรูปแบบการรวบรวมเชิงเส้น (Linear combination) ของผลคูณระหว่างจุดควบคุม (control points) และฟังก์ชั่นมูลฐาน (Basis function) สำหรับงานวิจัยนี้กำหนดให้ใช้พหุนามกำลัง 3 เนื่องจากเส้นสายที่มีพหุนามกำลัง 3 แทนการมนโค้งของรูปทรงในธรรมชาติได้เหมาะสมที่สุด การคำนวณหาจุดข้อมูลบนรูปทรงวัตถุทำได้ 2 ทางคือโดยใช้สมการเส้นโค้งและสมการผิว

2.1 สมการเส้นโค้งและผิว

นิยามเส้นโค้งบี-สไปลน์ด้วยพหุนามอันดับ k (กำลัง $k-1$) และพารามิเตอร์ u ประกอบด้วยจุดควบคุม p_i จำนวน $n+1$ จุด แต่ละจุดคู่กับฟังก์ชั่นมูลฐาน $N_{i,k}(u)$ เขียนแทนด้วยสมการ

$$C(u)=\sum_{i=0}^{n} p_i N_{i,k}(u) \qquad (1)$$
$$a \le u \le b$$

กำหนดด้วยน็อทเวกเตอร์

$$T=(t_0,...,t_{n+k})$$
$$=(\underbrace{a,...,a}_{k},t_k,...,t_n,\underbrace{b,...,b}_{k})$$

และฟังก์ชั่นมูลฐาน $N_{i,k}(u)$ จากอัลกอริธึมของค็อกซ์ เดอ บัวร์ (Cox de Boor Algorithm) [3] นิยามในช่วงน็อท $[t_i,t_{i+k}]$

$$N_{i,1}(u)=\begin{cases}1 & if\ t_i \le u < t_{i+1}\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad (2)$$
$$N_{i,k}(u)=\frac{(u-t_i)N_{i,k-1}(u)}{t_{i+k-1}-t_i}+\frac{(t_{i+k}-u)N_{i+1,k-1}(u)}{t_{i+k}-t_{i+1}}$$

นิยามผิวบี-สไปลน์ด้วยพหุนามอันดับ k และ l สำหรับพารามิเตอร์ 2 ตัวแปร u และ v ตามลำดับ

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{ij}N_{i,k}(u)N_{j,l}(v) \qquad (3)$$
$$a \le u \le b \quad , \quad c \le v \le d$$

และกำหนดด้วย 2 น็อทเวกเตอร์

$$T_u=(\underbrace{a,...,a}_{k},t_k^u,...,t_n^u,\underbrace{b,...,b}_{k})$$
$$T_v=(\underbrace{c,...,c}_{l},t_l^v,...,t_m^v,\underbrace{d,...,d}_{l})$$

สามารถคำนวณหาจุดพิกัดบนผิว โดยการกำหนดให้ $u=u_0$ (คงที่) แล้วเปลี่ยนแปลงค่า v เพื่อหาเส้นโค้งบี-สไปลน์กำลัง l , $C_{u_0}(v)$ และกำหนดให้ $v=v_0$ (คงที่) แล้วเปลี่ยนแปลงค่า u เพื่อหาเส้นโค้งบี-สไปลน์อันดับ k , $C_{v_0}(u)$

สำหรับเส้นโค้งและผิวของเนิร์ป [3] นิยามด้วยสมการคล้ายบี-สไปลน์แต่จะกำหนดให้ฟังก์ชั่นมูลอยู่ในรูปสัดส่วน และมีตัวแปรถ่วง (weight) เพื่อควบคุมรูปร่างเส้นโค้ง

เส้นโค้งเนิร์ปอันดับ k นิยามโดย

$$C(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n} p_i\omega_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n} \omega_i N_{i,k}(u)} \qquad a \le u \le b \qquad (4)$$

โดยที่ ω_i ตัวแปรถ่วง (Weights)

p_i จุดควบคุม (เพื่อสร้างสี่เหลี่ยมควบคุม)

$N_{i,k}(u)$ ฟังก์ชั่นมูลฐานคำนวณจากอัลกอริธึมของค็อก เดอ บัว

นิยามผิวเนิร์ปอันดับ k ในทิศทาง u และอันดับ l ในทิศทาง v

$$S(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{ij}\omega_{ij}N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \omega_{ij}N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)} \qquad (5)$$
$$a \le u \le b \quad , \quad c \le v \le d$$

กำหนดน็อทเวกเตอร์ที่ไม่เป็นคาบ (ไม่สม่ำเสมอ)

2.2 การประมาณค่าในช่วง

การสร้างเส้นโค้งหรือผิวสำหรับงานวิจัยฉบับนี้ต้องการให้รูปทรงวัตถุเหมือนต้นแบบที่เก็บข้อมูลมากที่สุด ซึ่งการคำนวณจะต้องผ่านข้อมูลเดิมทุกๆ จุด จึงได้นำการประมาณค่าในช่วง (Interpolation) มาใช้

สำหรับการคำนวณหาจุดควบคุม จากสมการเส้นโค้งบี-สไปลน์ (1) เขียนในรูปเมตริก

$$C = NP \tag{6}$$

โดยที่ C เมตริกจุดข้อมูล, N เมตริกของฟังก์ชั่นมูลฐาน และ P เมตริกของจุดควบคุม ดังนั้นสามารถหาจุดควบคุมโดย

$$P = N^{-1}C \tag{7}$$

สมการ (7) การหาเมตริกของจุดควบคุมมาสามารถทำได้โดยการอินเวอร์ส (Inverse) สมการข้างต้นโดยตรง จำเป็นต้องใช้เทคนิคการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) โดยการสร้างเมตริกสามเหลี่ยมทแยงมุม (tridiagonal matrix) [5]

การประมาณค่าในช่วงดังกล่าวผ่านมาสำหรับเส้นโค้งเปิด กรณีเส้นโค้งปิดการคำนวณทำนองเดียวกัน แต่จำกัดสำหรับ น็อทเวกเตอร์ที่เป็นคาบ [5]

การคำนวณหาจุดควบคุมของเส้นโค้ง เพื่อสร้างรูปทรงด้วยเส้นโค้งโครงข่ายพาดผ่าน 2 ทิศทาง (u,v) สำหรับการสร้างรูปทรงโดยการจำลองผิว ใช้การฟิตผิวพาราเมตริกผ่านเซ็ทข้อมูล พิจารณาสมการผิวบี-สไปลน์ (3) เขียนสมการในรูป

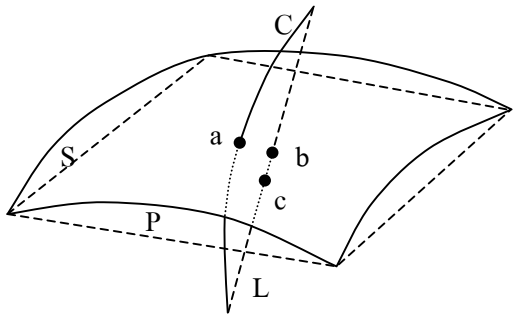
$$\begin{aligned} S(u,v) &= \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)\left(\sum_{j=0}^{m} p_{ij}N_{j,l}(v)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)Q_i \end{aligned} \tag{8}$$

สามารถประมาณค่าภายในช่วงเพื่อหาโครงข่ายจุดควบคุม ด้วยการประมาณค่าในช่วงในทิศทางพาราเมตริก u เพื่อหาจุดควบคุม Q_i หลังจากนั้นทำการประมาณค่าในช่วงในทิศทางพาราเมตริก v เพื่อหาจุดควบคุม p_{ij} โดยใช้หลักการประมาณค่าภายในทำนองเดียวกับเส้นโค้ง

2.3 การตัดกันของผิว

การตัดกันของผิวเป็นปัญหาสำคัญในงานการสร้างรูปทรงเรขาคณิตที่ซับซ้อนบนคอมพิวเตอร์ โดยการนำรูปทรงง่ายๆ มาประกอบรวมกันเป็นรูปทรงที่ซับซ้อนมากขึ้น ดังนั้นการประกอบรวมกันของรูปทรงวัตถุจะต้องเกี่ยวข้องกับระบบปฏิบัติ การของเซ็ท ซึ่งจะนำผิวของรูปทรงง่ายๆมาตัดกันเพื่อหาเรขาคณิตของผิวสำหรับรูปทรงใหม่ ขบวนการดังกล่าวเรียกว่าการคำนวณขอบเขต (Boundary) เพื่อหาเส้นรอบรูป (contour) ทำให้ทราบตำแหน่งที่ต้องการประกอบรูปทรงง่ายๆ สองชิ้นเข้าด้วยกัน

การคำนวณหาการตัดกันของผิวเป็นปัญหาที่ค่อนข้างยาก และซับซ้อน เนื่องมาจากจุดข้อมูลที่มากมายของทั้งสองผิว แต่มีข้อมูลน้อยมากบนแต่ละผิวที่มีค่าเท่ากัน ที่สามารถใช้หลักการการซ้ำกันของข้อมูลเพื่อทำการตัด (Intersection) ดังนั้นงานวิจัยชิ้นนี้จึงได้หาวิธีการสำหรับการตัดกันของผิว โดยใช้คณิตศาสตร์ที่ไม่ซับซ้อนมาก



รูปที่ 1 การตัดกันของผิวย่อยและเส้นโค้งย่อย

การตัดกันของผิวกับผิว กำหนดให้ผิวแรกแบ่งเป็นผิวย่อยๆ และอีกผิวนำโครงข่ายเส้นโค้งที่ประกอบเป็นผิวแบ่งเป็นเส้นโค้งย่อยๆ ซึ่งการแบ่งได้ทำมาแล้วจากขั้นตอนการสร้างจุดข้อมูลที่ผ่านมา พิจารณารูปที่ 1 การตัดกันของผิวย่อย S และเส้นโค้งย่อย C ที่จุดตำแหน่ง a ซึ่งรูปทรงวัตถุจริงต้องมีผิวย่อย (ประกอบกันเป็นผิว) และเส้นโค้งย่อย (ประกอบกันเป็นเส้นโค้ง) ที่ไม่เป็นผิวราบ (Plane) และเส้นตรง ตามลำดับ เมื่อนิยามผิวย่อยแต่ชิ้นเป็นแผ่นผิวราบ P และเส้นโค้งย่อยแต่ละเซ็กเมนต์เป็นเส้นตรง L ซึ่งมีจุดตัดที่ c ความถูกต้องขึ้นกับการแบ่ง (subdivision) ผิวของรูปทรงวัตถุ และเส้นโค้งของรูปทรงวัตถุอีกชิ้น เพื่อนำผิวย่อยและเส้นโค้งย่อยมาตัดกัน ที่จะทำให้เกิดข้อผิดพลาดน้อยที่สุด

นิยามสมการเส้นตรงพาราเมตริก [6] บนผิวรูปทรงวัตถุ

$$\begin{aligned} s(u) &= s(x(u), y(u), z(u)) \\ s &= s_1 + (s_2 - s_1)u \qquad 0 \le u \le 1 \end{aligned} \tag{9}$$

และสมการผิวอิมพลิสิทของผิวราบ

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 0 \\ Ax + By + Cz + D &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

แทนสมการ (9) ทั้ง 3 ส่วนประกอบ ลงในสมการ (10) จะได้

$$f(x(u), y(u), z(u)) = 0$$

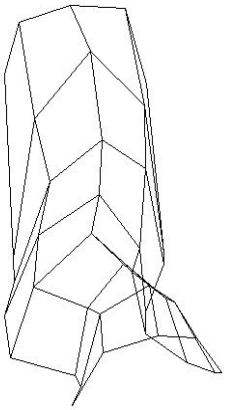
สำหรับตรวจสอบค่าพารามิเตอร์ u ซึ่ง $u \in [0,1]$ นำไปแทนในสมการ (9) เพื่อหาจุดตัดเป็นพิกัดตำแหน่ง x, y, z บนผิวรูปทรงวัตถุ นำข้อมูลจัดเรียงเป็นเส้นโค้งจากการตัดต่อไป

สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้คำนวณหาเส้นรอบรูปจากการตัดกันของผิวรูปทรงวัตถุกับผิวราบ เพื่อเป็นข้อมูลป้อนเข้าเครื่องสร้างตันแบบเร็ว ซึ่ง

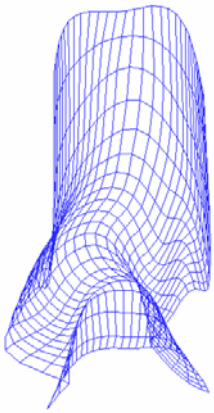
ตัดกระดาษตามเส้นรอบรูปแต่ละชั้นของรูปทรงวัตถุนำมาเรียงซ้อนกันจนได้ต้นแบบรูปทรงวัตถุ

2.4 ผลลัพธ์

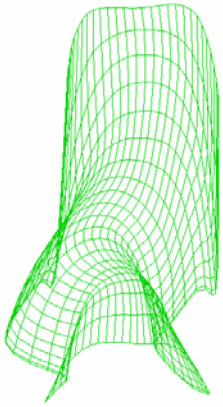
การจัดเก็บข้อมูลของรูปทรงวัตถุอย่างคร่าวๆ เพื่อเป็นจุดข้อมูลเข้า ดังรูปที่ 2ก ประกอบด้วยจำนวน 8 เซ็กชั่น จำนวนจุดข้อมูลบนเซ็กชั่น 5 จุด (ไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกเซ็กชั่น) และจุดพิกัดตำแหน่ง x, y, z ส่วนแฟ้มผลลัพธ์จัดเก็บในรูป <file>.cli สำหรับเครื่องสร้างต้นแบบเร็ว และ<file>.tec หรือ <file>.dat สำหรับทดสอบข้อมูลบนโปรแกรมเทคพล็อท (TecPlot) ดังรูปที่ 2ข และ 2ค จุดข้อมูลจากการคำนวณด้วยสมการเส้นโค้งและผิวของสไปล์ ได้จุดข้อมูลที่ละเอียดขึ้น โดยการกำหนดจำนวนข้อมูลตามต้องการผ่านพารามิเตอร์ u และ v



ก. ข้อมูลเข้า



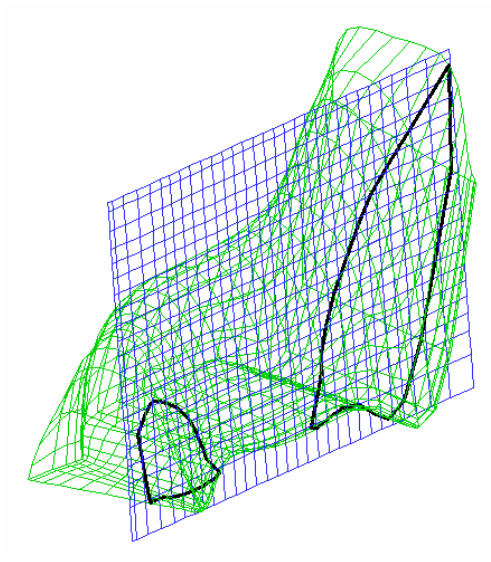
ข. ข้อมูลจากเส้นโค้งสไปล์



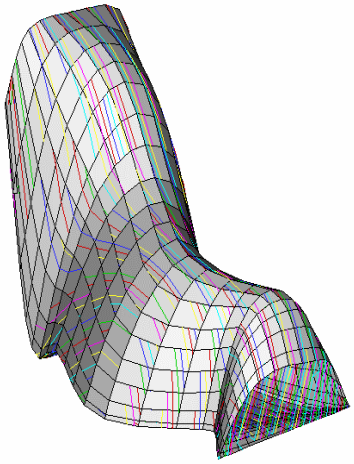
ค. ข้อมูลจากผิวสไปล์

รูปที่ 2 เปรียบเทียบจุดข้อมูลเข้าและออกจากการคำนวณด้วยเส้นโค้งและผิวสไปลน์

การตัดกันของผิวรูปทรงวัตถุและผิวราบบนแนวแกน y ดังรูปที่ 3 เป็นส่วนหนึ่งของการตัดทั้งรูปทรงแบ่งเป็นชั้นๆ สำหรับข้อมูลของเส้นรอบรูปทั้งรูปทรงดังรูปที่ 4 พล็อตรวมกับรูปทรงเพื่อการพิจารณาความถูกต้อง



รูปที่ 3 ผลจากการตัดรูปทรงวัตถุด้วยผิวราบบนแนวแกน y



รูปที่ 4 เส้นรอบรูปจากการตัดผิวรูปทรงวัตถุด้วยแผ่นผิวราบ

การสร้างรูปทรงวัตถุโดยการคำนวณจุดข้อมูลที่ละเอียดขึ้นจากจุดข้อมูลอย่างคร่าวๆ และการคำนวณเส้นรอบรูปจากการตัดกันของผิว ใช้โปรแกรมภาษาซีทำงาน และโปรแกรมเทคพล็อต เพื่อพล็อตข้อมูลสำหรับการพิจารณาผลลัพธ์

3. สรุป

การคำนวณหาจุดข้อมูลรูปทรงวัตถุให้ผลลัพธ์ดีพอสมควร โดยเฉพาะการคำนวณจากการใช้สมการผิวสไปล์ดูแล้วสบายตา และเรียบเกลามากกว่าการใช้สมการเส้นโค้งสไปล์ แต่เรขาคณิตของรูปทรงที่ได้จากการสร้างทั้งสมการเส้นโค้งและสมการผิวไม่แตกต่างกันมาก สำหรับการคำนวณหาเส้นรอบรูปจากการตัดให้ผลลัพธ์ที่ดี แต่จำกัดที่การแบ่งผิวย่อยๆ ของทั้ง 2 ผิวต้องไม่หยาบจนเกินไปเพราะอาจทำให้เส้นจากการตัดไม่มนโค้งตามธรรมชาติ และรูปทรงที่นำมาตัดควรเป็นรูปทรงปิดจะช่วยลดความผิดพลาดที่เกิดขึ้นได้มาก

4. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยชิ้นนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของอาจารย์หลายๆ ท่านจากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล และดร. จุฬาลักษณ์ ค้าไม้ ที่ได้ให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ

5. เอกสารอ้างอิง

[1] อุดมเกียรติ นนทแก้ว. " โปรแกรมแบ่งพาเนลอัตโนมัติ " ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, 2542.

[2] Gerald Farin, "Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design : A Practical Guide.", 4th ed. ACADEMIC PRESS, 1996.

[3] Les Piegl and Wayne Tiller, "The NUEBS Book: Monographics in visual Communication." 2nd ed, Springer, 1997.

[4] David F. Rogers and J Alan Adams, "Mathematical Elements for Computer Graphics." 2nd ed, MvGraw-Hill, 1990.

[5] Alan Watt and Mark Watt, "Advanced Animation and Rendering Techniques : Theory and Practice." New York : ADDISON-WESLEY, 1992.

[6] Michael E. Mortenson, "Computer Graphics Handbook : Geometry and Mathematics." New York: Industrial Press Inc.,1990.