การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 23
4 – 7 พฤศจิกายน 2552 จังหวัดเชียงใหม่

การหารูปแบบที่เหมาะสมของรูปร่างหน้าตัดสำหรับผลิตภัณฑ์ล้อยางตัน

Optimization of cross sectional geometry for solid tire

ปรัชญา สาริพัฒน์ [1,*] และ ผศ.ดร. อริสรา ชัยกิตติรัตนา[1]

[1] ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
1518 ถนนพิบูลสงคราม เขตบางซื่อ กรุงเทพฯ 10800
*ติดต่อ : โทร. 0-2913-2500 โทรสาร 0-2587-4350
E-mail: psaripat@hotmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาการออกแบบรูปร่างลักษณะของหน้าตัดล้อยางตัน ที่มีประสิทธิภาพทั้งในด้านของคุณภาพการใช้งานและราคาที่เหมาะสม เพื่อหารูปแบบที่เหมาะสมของรูปร่างหน้าตัด ในการสร้างล้อยางตันสำหรับรถโฟล์ค ลิฟต์ ที่ลดปริมาณการใช้เนื้อวัสดุลง แต่ยังคงความแข็งแรงในการใช้งานได้อย่างมีคุณภาพ โดยใช้โปรแกรม Matlab ในการคำนวณทางไฟไนต์เอลิเมนต์และการหาโทโปโลยีเหมาะสมที่สุด โดยการกระบวนการหาค่าน้อยที่สุดของ Compliance เมื่อทดสอบหลายๆกรณี พบว่า ตัวแปรหลักๆที่มีผลต่อรูปร่างลักษณะของหน้าตัดล้อยางตันอย่างมาก นั่นคือค่า Volume fraction และ r_{min} โดยมีผลออกมา ใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการพัฒนารูปแบบต่อไป

คำหลัก: ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์, การหาค่าความเหมาะสมทางทอพอโลยี, Compliance, Volume fraction

Abstract

This research studies to basic design cross-section of the solid tire how it should be the best on quality and economic. Optimize cross-section to design a Solid tire for forklift car with reduce mass of material but strength for work have more quality. Using Matlab with calculate in finite element method and Topology Optimization to minimize Compliance is main process. After tests ,main variables have more effect cross-section is Volume fraction and r_{min} .That is conceptual design for developed design cross-section of solid tire.

Keywords: finite element, Optimization Topology, Compliance, Volume fraction

1. บทนำ

ในปัจจุบัน สภาพเศรษฐกิจมีการเปลี่ยนแปลง ราคาน้ำมันผันผวน ทำให้ค่าครองชีพและต้นทุนในด้านต่างๆ สูงขึ้นตามไปด้วย ดังนั้นในหลายๆ ผลิตภัณฑ์จึงมีการคิดวิธีการที่จะลดต้นทุน ของผลิตภัณฑ์ ได้แก่ การลดขนาดผลิตภัณฑ์ , การผสมผลิตภัณฑ์กับวัสดุราคาถูก โดยที่มีคุณภาพของผลิตภัณฑ์ยังอยู่ในเกณฑ์ที่น่าพอใจ ล้อยางตันก็เป็นผลิตภัณฑ์ประเภทหนึ่งที่ใช้ในอุตสาหกรรม เพราะว่าสามารถรับน้ำหนักได้มาก ดังจะเห็นได้จากรถโฟล์ค ลิฟต์ ที่ใช้ในโรงงานอุตสาหกรรม ล้อยางตันเป็นผลิตภัณฑ์ที่ใช้ยางพารา

เป็นวัตถุดิบหลัก งานวิจัยนี้ ได้คิดทดลองในกรณีของการหารูปร่างหน้าตัดของวัสดุยางอย่างไร จึงให้ผลดีที่สุด ในเรื่องคุณภาพ และราคา ดังนั้นข้อพิจารณาในการออกแบบล้อยางเพื่อให้ได้คุณสมบัติดังที่กล่าวมาจะประกอบ ด้วย 2 องค์ประกอบ กล่าวคือ การพิจารณาลักษณะรูปร่าง (Geometry) ของล้อยาง และการพิจารณา คุณสมบัติเชิงกลของยางที่เป็นองค์ประกอบในล้อยางตันโดยงานวิจัยนี้จะทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Analysis) และใช้การหาค่าความเหมาะสมทางโทโปโลยี (Topology Optimization)

2. ทฤษฎีที่นำมาใช้

2.1 ระเบียบวิธีทางไฟไนต์อิเลเมนต์

หลักการของ ระบียบวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ในขั้นต้น เริ่มจากการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นพื้นที่หลายๆพื้นที่หรือเป็นปริมาตรหลายๆปริมาตรอย่างต่อเนื่อง ซึ่งจะเรียกว่าเอลิเมนต์ ผลเฉลยที่ได้รับจะเป็นผลเฉลยที่จุดต่อ (Node) ของแต่ละเอลิเมนต์ โดยผลเฉลยของแต่ละเอลิเมนต์ต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ ซึ่งก็หมายความว่าหลักการ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มต้นจากการพิจารณาเอลิเมนต์ทีละเอลิเมนต์และทำการสร้างสมการสำหรับเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ โดยสมการที่สร้างขึ้นมาต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายปัญหาเหล่านั้น จากนั้นนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์มาประกอบรวมกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม ซึ่งในความหมายทางกายภาพก็คล้ายกับการนำทุกเอลิเมนต์มาประกอบรวมกันก่อให้เกิดเป็นรูปร่างของปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ [1]

2.2 การหาค่าความเหมาะสมทางโทโปโลยี

หลักการของการหาค่าความเหมาะสมทางโทโปโลยี คือ การหาโครงร่างหรือรูปทรงโดยประมาณของวัตถุหรือโครงสร้างที่เราต้องการนำมาใช้งานอย่างใดอย่างหนึ่ง ในมุมมองทางคณิตศาสตร์ปัญหาการออกแบบนี้คือการหาค่าเหมาะสมที่สุด สำหรับโครงสร้างแบบแผ่นนั้นโดยทั่วไปจะแบ่งพื้นที่ออกแบบ (design domain) ออกเป็นเอลิเมนต์เล็กๆ สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ฟังก์ชั่นเป้าหมายที่นิยมใช้คือค่าพลังงานความเครียด ความถี่ธรรมชาติ และน้ำหนักของโครงสร้าง ส่วนตัวแปรออกแบบที่เป็นไปได้คือ ความหนาของเอลิเมนต์ หลังจากการหาค่าเหมาะสมที่สุดแล้วถ้าเอลิเมนต์ไหนมีความหนาเข้าใกล้ศูนย์แสดงว่าต้องทำการเจาะรู [2] พื้นที่ตรงนั้น นอก จากนี้ยังสามารถพิจารณาใช้ตัวแปรอื่น เช่นความหนาแน่นของเอลิเมนต์ ค่ายังโมดูลัสของเอลิเมนต์ เป็นต้น การหาค่าความเหมาะสมทางทอพอโลยี แบ่งเป็น 2 วิธีใหญ่ คือ

- Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)
- Evolutionary Structural Optimization (ESO)

ในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธี SIMP เมื่อต้องการหาค่า ความเหมาะสมทางโทโปโลยีนั้นคือต้องการให้ Compliance ซึ่งเมื่อค่าพลังงานความเครียดในระบบน้อย ค่า Compliance ก็จะมีค่าน้อยไปด้วย กำหนดด้วยข้อจำกัดขอบเขต โดยเริ่มแรก กำหนดให้ [3]

$$\rho = x^e \rho_0 \qquad (1)$$

โดยที่ x^e คือ relative density ของวัสดุ ในเอลิเมนต์ $x^e = 1$ เมื่อวัสดุนั้นเป็นของแข็ง
กำหนดสมการ Compliance ในสมการที่ 2

$$C = F^T u = u^T k u = \sum_{e=1}^{N} u^e k^e u^e = \sum_{e=1}^{N} (x^e)^p u^e k^0 u^e \qquad (2)$$

$$k^e = (x^e)^p k^0$$

เมื่อ N คือ จำนวนของเอลิเมนต์
p คือ penalty factor

เพื่อการหาค่าความเหมาะสมทางโทโปโลยี โดยการ Minimize ค่า Compliance สามารถทำได้ตามสมการ (3)

$$\begin{aligned} &Minimise: && C = F^T u \\ &Subject_to: && F = ku \\ & && : f = \frac{V}{V_0} \\ & && : 0 < x_{\min} \le x^e \le x_{\max} \end{aligned} \qquad (3)$$

โดยทั่วไปจะต้องค่า x_{max} = 1 และ x_{min} = 0.001 ในการแก้ปัญหาหาค่าความเหมาะสม เลือกวิธีการแก้ปัญหาใช้ Lagrangian function มีขั้นตอนคือ ใช้วิธี optimality criteria สำหรับปรับปรุงตัวแปรที่ใช้ออกแบบ และ Lagrangian multiplier เพื่อหารูปแบบการทำซ้ำ

$$\begin{aligned} L = C &+ \lambda(V - fV_0) + \lambda_1^T(ku - F) \\ &+ \sum_{e=1}^{N} \lambda_2^e (x_{\min} - x^e) + \sum_{e=1}^{N} \lambda_3^e (x^e - x_{\max}) \end{aligned} \qquad (4)$$

หาคำตอบ รูปแบบการทำซ้ำ คือ

$$x^e{}_{n+1} = x_n{}^e \cdot \left(\frac{p \cdot (x^{p-1}) \cdot q_c}{\lambda v} \right)^{\xi} = x_n{}^e (B_n{}^e)^{\zeta} \qquad (5)$$

$$q_c = u^e k^0 u^e$$

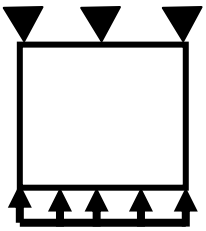
$$x^e{}_{n+1} = \begin{cases} \max((1-m)x_k{}^e, x_{\min}) \\ if_x_n{}^e (B_n{}^e)^{\zeta} \le \max((1-m)x_k{}^e, x_{\min}) \\ x_n{}^e (B_n{}^e)^{\zeta} \\ if_\max((1-m)x_k{}^e, x_{\min}) \le x_n{}^e (B_n{}^e)^{\zeta} \\ \le \min((1+m)x_k{}^e, x_{\max}) \\ \min((1+m)x_k{}^e, x_{\max}) \\ if_x_n{}^e (B_n{}^e)^{\zeta} \ge \min((1+m)x_k{}^e, x_{\max}) \end{cases} \qquad (6)$$

เมื่อ m คือ move limit

ζ คือ damping ratio

3. ขั้นตอนการทำงาน

จากทฤษฎีข้างต้น จึงนำมาประยุกต์เพื่อใช้หาค่าความเหมาะของรูปร่างหน้าตัดล้อยางตัน โดยใช้โปรแกรม Matlab ในการคำนวณทางไฟไนต์เอลิเมนต์และการหาโทโปโลยีเหมาะสมที่สุด โดยสามารถกำหนดตัวแปรต่างๆ ได้ แต่ได้กำหนดส่วนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 2 มิติ [4] นั้น ได้เลือกใช้เอลิเมนต์ แบบ Quadrilateral (4 node ต่อ 1 เอลิเมนต์) และหาค่า Stiffness สำหรับแต่ละเอลิเมนต์แบบ plane strain สมมุติหน้าตัดล้อยางตันเป็นรูปสี่เหลี่ยม กำหนด boundary condition ขอบบนทั้งหมด เฉพาะแกนตั้ง และให้ขอบล่างรับแรงกระจายทิศขึ้นโดยมองเป็นส่วนที่สัมผัสกับพื้นตามรูปที่ 1



รูปที่ 1 แสดงการกำหนดหน้าตัดล้อยางตัน force vector และ boundary condition

ค่าที่ต้องกำหนดในการคำนวณคือ

1. h คือความหนาของ plane strain
2. Material Property Matrix for plane strain two dimensions (D) หาได้โดย ตั้งกำหนดค่าคงที่ Elastic Modulus (E) และ Poisson's ratio(υ) แต่เนื่องจากไม่มีผล กับ การหาค่าความเหมาะสมทางโทโปโลยี
3. Jacobian matrix(J) กำหนดให้ใช้ 2x2 formula
4. Kinematic Equation(B) ใช้วิธี จาโคเบียน ในการหาค่า
5. weight function (W) เนื่องจากหาค่า Jacobian โดยกำหนดให้ใช้ 2x2 formula จึงกำหนดค่า W_i , $W_j = {}_i$ =1.,1.
6. จำนวนเอลิเมนต์แนวตั้ง และแนวนอน

หลังจากนั้นหาค่า stiffness matrix (k^0) ของแต่ละเอลิเมนต์จากสมการ (6)

$$k^0 = B^T \cdot D \cdot B \cdot |J| \cdot h \cdot W_s \cdot W_t \qquad (6)$$

กำหนดค่าตัวแปรที่ต้องใช้ เพิ่มเติม ในการหาค่าความเหมาะสมทางโทโปโลยี

7. Volume fraction (x) ซึ่งก็คือ relative density ของแต่ละเอลิเมนต์ เป็นการกำหนดพื้นที่คงเหลือโดยรวม โดยค่าเริ่มต้น ให้ทุกค่าในเมทริกซ์ มีค่าเท่ากัน เช่น 0.4 คือต้องการให้พื้นที่หน้าตัดเหลือ 40% ของหน้าตัดเดิม เมื่อแสดงผลแล้ว คือส่วนที่เป็นสีดำ
8. Penalization factor (p) เป็นตัวเร่งการทำงานให้ค่าเฉพาะเจาะจงมากขึ้น

$$k^e = (x^e)^p \cdot k^0 \qquad (7)$$

หลังจากนั้นทำการแจกแจง และรวมค่าทุกเอลิเมนต์ จากนั้น จากสมการ(8) หาค่า displacement (U)

$$U = F \cdot K^{-1} \qquad (8)$$

โดยที่ U คือ displacement vector

F คือ load vector (เนื่องจากไม่มีผลจึงให้เท่ากับ 1)

K คือstiffness matrix รวมทุกเอลิเมนต์ ซึ่ง $K = \sum_N k^e$

เมื่อทราบค่า Stiffness matrix แล้ว ขั้นต่อไป คือ กำหนด load vector และ Boundary condition ขึ้นมาเพื่อการหาค่า displacement (U) ของทุกเอลิเมนต์มาแล้ว นำมาแทนค่าในสมการ (18) เพื่อหาค่า Compliance และ $\frac{\partial c}{\partial x}$

$$c = (x^e)^p \cdot (u^e)^T k^0 u^e \qquad (9)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -(\mathrm{p} \cdot (x^e)^{(p-1)}) \cdot (u^e)^T k^0 u^e \qquad (10)$$

ใช้วิธี Mesh Independency Filter เพื่อปรับปรุงค่าความเข้มของเอลิเมนต์ โดยลดความเข้มของเอลิเมนต์ที่มีค่ามาก ให้กระจายออกเป็นวงรัศมี r_{min} ให้ค่าความเข้มที่กระจายออก ลดลงตามระยะห่างเอลิเมนต์หลัก โดยให้ผลออกมาในรูปของ $\frac{\partial c}{\partial x}$

ใช้วิธี Optimality Criteria Update หาค่าx ใหม่โดยใช้สมการ (6) \โดยทั่วไปจะต้องกำหนดให้ move limit = 0.2 และ damping ratio = 0.5 ค่า x_{max} = 1 และ x_{min} = 0.001

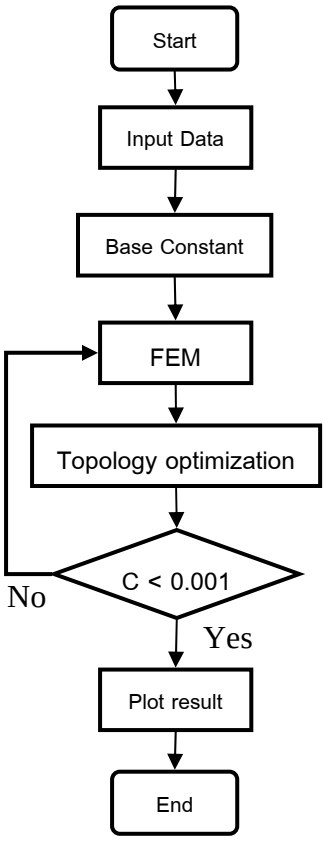
$$x^e{}_{n+1} = \begin{cases} \max((0.8)x_k{}^e, 0.001) \\ if_ x_n{}^e \cdot \sqrt{-\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{L}} \le \max((0.8)x_k{}^e, 0.001) \\ x_n{}^e \cdot \sqrt{-\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{L}} \\ if_ \max((0.8)x_k{}^e, 0.001) \le x_n{}^e \cdot \sqrt{-\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{L}} \\ \le \min((1.2)x_k{}^e, 1) \\ \min((1.2)x_k{}^e, 1) \\ if_ x_n{}^e \cdot \sqrt{-\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{L}} \ge \min((1.2)x_k{}^e, 1) \end{cases} \qquad (11)$$

ในการปรับปรุงรูปแบบการทำซ้ำตามสมการ(11) ปรับค่า L จนให้เงื่อนไขที่ 2 เป็นจริง จะได้

$$x_{n+1} = x_n \cdot \sqrt{-\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{L_{\min}}} \qquad (12)$$

เมื่อทำตามขั้นตอนที่กำหนดมาข้างต้นแล้ว กำหนดค่า c = 0.001 เป็นเงื่อนไขในการเสร็จสิ้นการทำซ้ำ กำหนดให้ทำซ้ำมากสุดที่ 300 เมื่อตรงเงื่อนไขแล้วนำค่าเมทริกซ์ของ Volume fraction มาแสดงผลเป็นตาราง โดยกำหนดให้ ถ้าค่าในตำแหน่งใดเท่ากับ 1 จะเป็นสีดำ และช่องในน้อยกว่า 1 ความเข้มก็จะลดลงตามอัตราส่วน เมื่อมีช่องใดมีค่าเท่ากับ 0 ช่อง

นั้นก็จะเป็นสีขาวเมื่อได้รูปสำเร็จให้ถือว่าส่วนสีดำเป็นเนื้อวัสดุส่วนสีขาวเป็นช่องว่าง โดยขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมที่เขียนใน Matlab แสดงในรูปที่ 2



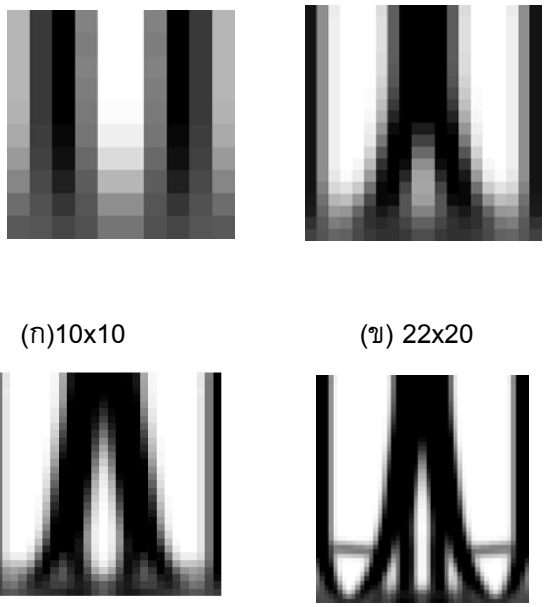
รูปที่ 2 flow Chart อธิบายขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมที่เขียนใน Matlab

4. ผลลัพธ์

4.1 ตัวแปรที่ใช้กำหนดผล

ในการแสดงผล มีการตัวแปรที่ส่งผลต่อรูปแบบของการหาค่าความเหมาะสมทางโทโปโลยี แบ่งออกเป็น

1. ความละเอียดในการแบ่งเอลิเมนต์ การแบ่งเอลิเมนต์นั้น ตามหลักแล้วยิ่งมาก ผลลัพธ์ก็จะถูกต้องมากขึ้น แต่ก็จะเสียเวลาคำนวณมากเช่นกัน โดยชิ้นงานต้นแบบนั้นมีขนาดหน้าตัด 153x144 มิลิเมตร จึงทดสอบที่อัตราส่วนต่างๆ เพื่อหาอัตราส่วนที่แบ่งหาค่าได้รวดเร็วและถูกต้อง รูปที่ 3-ก ขนาด 10x10 ไม่ชัดเจน รูปที่ 3-ข ขนาด 22x20 มองออกเป็นรูปร่างรูปที่ 3-ค ขนาด 31x29 มองออกเป็นรูปร่างชัดเจน รูปที่ 3-ง ขนาด 51x48 มองออกเป็นรูปร่างชัดเจนมากที่สุด แต่เลือกขนาด 31x29 แบบรูปที่ 3-ค เพราะใช้เวลา 5นาที ในการหาคำตอบ ต่างจากขนาด 51x48 แบบรูปที่ 3-ง ซึ่งใช้เวลา 40 นาที ในการหาคำตอบ โดยผลออกมาใกล้เคียงกัน

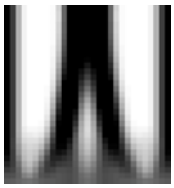


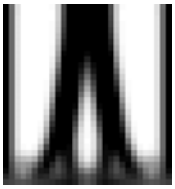
(ก)10x10 (ข) 22x20

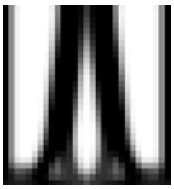
(ค) 31x29 (ง) 51x48

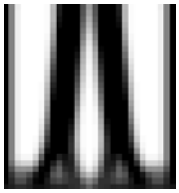
รูปที่ 3 ภาพหน้าตัดยาง ที่ Volume fraction = 50%, Penalization = 3.0 ,r_{min}= 2.2 ที่ขนาดต่างๆ

2. Penalization เป็นตัวเร่งการทำงาน ของโปรแกรมทำให้เมื่อลู่เข้าแล้ว จะไปสู่คำตอบเร็วขึ้น โดยรูปที่ 4-ค นั่นใช้เวลาในการหา น้อยกว่ารูปที่ 4-ก และ รูปที่ 4- ข แต่ใน รูปที่ 4-ง ไม่ให้ค่าลู่เข้า ยังคงทำซ้ำไปเรื่อยๆ ไม่สิ้นสุด แต่ได้กำหนดให้ทำซ้ำมากสุดที่ 300 ครั้งจึงแสดงรูปที่ 4-ง ทั้งที่ค่า C < 0.001


(ก) p=2.0


(ข) p=2.5

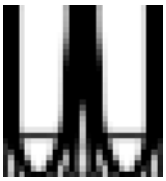

(ค) p=3.0

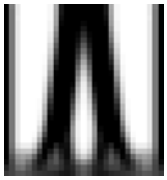

(ง) p=3.5

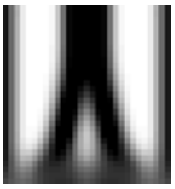
รูปที่ 4 ภาพหน้าตัดยาง ที่ Volume fraction = 50%, , r_{min}= 2.2 ที่ขนาด 31x29 ที่ Penalization มีค่าต่างๆ

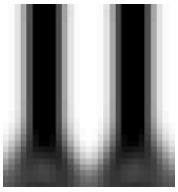
3. r_{min} เป็นการปรับปรุงค่าความเข้มของเอลิเมนต์ โดยลดความเข้มของเอลิเมนต์ที่มีค่ามาก ให้กระจายออกเป็นวงรัศมี โดยรูปที่ 5(ก) นั่นไม่ได้มีการปรับปรุงค่าความเข้ม เมื่อเปลี่ยนค่าแล้วทำรูปแบบเปลี่ยนไปแบ่งคร่าวๆ ได้ 2 แบบ คือ r_{min} = 2.2 และ r_{min} = 3.5

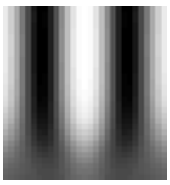
(ก) 1


(ข) 1.2


(ค) 2.2

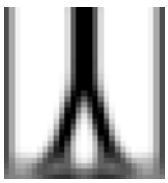

(ง) 3.2

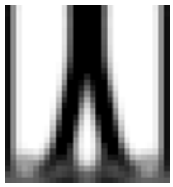

(จ) 3.5

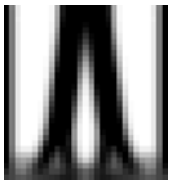

(ฉ) 4.5

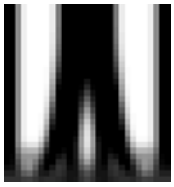
รูปที่ 5 ภาพหน้าตัดยาง ที่ Volume fraction = 50%, , ที่ขนาด 31x29 Penalization = 3.0 ,ที่ r_{min} ต่างๆ

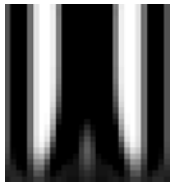
4. Volume fraction เป็นการกำหนดพื้นที่คงเหลือรวม โดยจะใช้ค่านี้เป็นหลักในการหาค่าความเหมาะสมขั้นต่อไป โดยให้แสดงค่าที่ค่า r_{min} = 2.2 ตามรูปที่ 6 และ r_{min} = 3.5 ตามรูปที่ 7

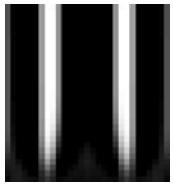

(ก) 30%


(ข) 40%

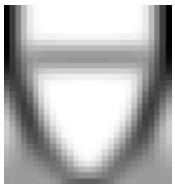

(ค) 50%

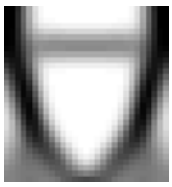

(ง) 60%

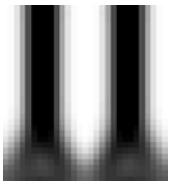

(จ) 70%

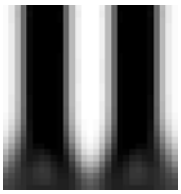

(ฉ) 80%

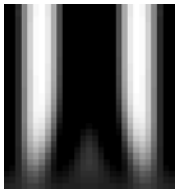
รูปที่ 6 ภาพหน้าตัดยาง Penalization = 3.0 ,ขนาด 31x29 เอลิเมนต์, r_{min}= 2.2 ที่ค่าVolume fraction ต่างๆ

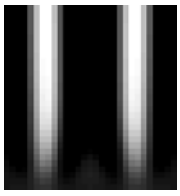

(ก) 30%


(ข) 40%


ค) 50%


(ง) 60%


(จ) 70%


(ฉ) 80%

รูปที่ 7 ภาพหน้าตัดยาง Penalization = 3.0, ขนาด 31x29 เอลิเมนต์, r_{min}= 3.5 ที่ค่าVolume fraction ต่างๆ

4.2 สรุปผลและข้อเสนอแนะ

จากงานวิจัยนี้ แสดงให้เห็นว่า เราสามารถใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ร่วมกับการหาค่าความเหมาะสมทางโทโปโลยี (แบบ SIMP) ในการหารูปแบบของหน้าตัดของล้อยางตันที่เหมาะสม โดยการ Minimize Compliance และ หลังจากทดสอบหลายๆ กรณีดูแล้ว ตัวแปรหลักๆที่มีผลต่อรูปร่างอย่างมาก นั่นคือค่า Volume fraction และ r_{min} โดยมีผลออกมา

ใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการพัฒนารูปแบบต่อไป เช่น การใช้วิธี ESO ในการหาคำตอบ การทดสอบวัสดุผสม การเปลี่ยนประเภทของเอลิเมนต์ ต่อไป

5. เอกสารอ้างอิง

5.1 หนังสือ

[1] Daryl L. Logan (2002).A First Course in the Finite Element Method,CA.USA : Brooks/Cole

[2] M.P. Bendsϕe,O.sigmund (2003). Topology Optimization :Theory,Methods and Application , Germany :Springer

[3] W. Renold (2006).Investigation into Structural Topology Optimization Problem Formulations, University of BATH

[4] Y. W. Hwon and H.C. Bang(1997). The Finite Element Method Using MATLAB , USA:CRC Press LLC