การถ่ายเทความร้อนผ่านแท่งสี่เหลี่ยมมีรูกลวงกลมตลอดกึ่งกลางหน้าตัด ด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์ 2 มิติ

Heat transfer through a square rod with a circular hollow through the center of cross section by 2 D finite resistance method

ประเสริฐ อินประเสริฐ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม
235 ถนนเพชรเกษม เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10163
โทร. 457-0068 ต่อ 121, โทรสาร 457-3982, อีเมล์ Prasert_Inp@yahoo.com

Prasert Inprasert
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Siam University
235 Petkasem Road, Phasicharoen, Bangkok 10163
Tel: 457-0068 Ext 121, Fax: 457-3982, E-Mail: Prasert_Inp@yahoo.com

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการคำนวณการถ่ายความร้อนด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์ 2 มิติ โดยแบ่งเนื้อวัสดุเป็นชิ้นเล็กๆจำนวนมาก ซึ่งแต่ละชิ้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 4 ตัว แล้วใช้โปรแกรมอิเลคทรอนิคเวอร์คเบนช์คำนวณแบบจำลองความต้านทานนี้ เปรียบเทียบกับทฤษฎีของการนำความร้อน 2 มิติ ที่ใช้ค่าเชฟแฟคเตอร์ในการคำนวณเพื่อหาความความผิดพลาดของอัตราการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้น เมื่อกำหนดให้แท่งแก้วสี่เหลี่ยมมีขนาดหน้าตัด 30X30 mm^2 ยาว 1 m มีรูกลวงเป็นวงกลมตลอดกึ่งกลางหน้าตัด ผนังรูมีอุณหภูมิ 70 $^{\circ}C$ ผิวด้านนอกแท่งแก้วมีอุณหภูมิ 20 $^{\circ}C$ และค่าสภาพการนำความร้อนของแก้ว 0.7 W/m.$^{\circ}C$ กรณีรูกลวงมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 10 mm เมื่อแบ่งเนื้อวัสดุเป็นชิ้นเล็กจำนวน 205 ชิ้น ปรากฏว่ามีความผิดพลาด -3.54 %, กรณีรูกลวงมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 6 mm เมื่อแบ่งเนื้อวัสดุเป็นชิ้นเล็กจำนวน 217 ชิ้น ปรากฏว่ามีความผิดพลาด -2.85 %, กรณีรูกลวงมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 4 mm เมื่อแบ่งเนื้อวัสดุเป็นชิ้นเล็กจำนวน 221 ชิ้น ปรากฏว่ามีความผิดพลาด 1.40 % จากค่าเปอร์เซนต์ความผิดพลาดที่คำนวณจากรูกลวงขนาดต่างๆแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความต้านทานทางความร้อนนี้สามารถคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์ 2 มิติ ได้ ซึ่งจะมีประโยชน์ในการแก้ปัญหากรณีการถ่ายเทความร้อน 2 มิติ ที่มีรูปร่างแตกต่างจากตารางเชฟแฟคเตอร์การนำความร้อน 2 มิติที่มีให้ไว้

Abstract

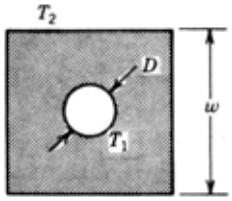
This paper present to calculate heat transfer by 2 D finite resistance method. By divide a material to many small elements, each element can change to be 4 conduction resistances. Using a ELECTRONIC WORKBENCH software to calculate this resistance model and compare with 2 D conduction shape factor theory to find an error of heat transfer rate. The calculation let a square rod, with 30 mm X 30 mm X 1 mm for its width, length and thickness respectively, have a cicular hollow through the center of cross section. The rod hollow wall having a temperature 70 $^{\circ}C$, the rod outside wall having a temperature 20 $^{\circ}C$ and thermal conductivity is 0.7 W/m.$^{\circ}C$. The case of circular hollow have 10 mm diameter, divide cross section to 205 elements having an error result -3.54 %. The case of circular hollow have 6 mm diameter, divide cross section to 217 elements having an error result -2.85 %. And the case of circular hollow have 4 mm diameter, divide cross section to 221 elements having an error result 1.40 %. From the error result of each circular hollow diameter show that this resistance model can be calculated by 2 D finite resistance method. It can be useful to solve a 2 D heat transfer problem which a shape difference from a 2 D conduction shape factor table.

1. บทนำ

วิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์เป็นการคำนวณการถ่ายความร้อนซึ่งผสมผสานแนวคิดมาจากวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์และเทอร์มอลรีซิสแทนซ์ประกอบเข้าด้วยกัน[4][5] สำหรับบทความนี้จะใช้โปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้ในการคำนวณวงจรไฟฟ้าทั่วไปมาคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อน ซึ่งในการแก้ปัญหาการถ่ายความร้อน 1 มิติ แสดงให้เห็นว่าวิธีการนี้สามารถนำไปใช้ได้และให้ค่าความถูกต้องมากขึ้นเมื่อแบ่งจำนวนชิ้นมากขึ้น[1]

บทความนี้ได้นำมาคำนวณแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน 2 มิติที่มีรูปร่างเหมือนกับรูปที่ปรากฏอยู่ในตารางเชฟแฟคเตอร์การนำความร้อน 2 มิติ เพื่อยืนยันถึงความถูกต้องของแบบจำลองความต้านทานทางความร้อน 2 มิติ ซึ่งจะมีประโยชน์ในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่มีรูปร่างแตกต่างจากตารางเชฟแฟคเตอร์ที่มีให้ไว้ และเพิ่มความมั่นใจในการคำนวณปัญหาที่มีรูปทรงซับซ้อนต่อไป

การคำนวณทดสอบความแม่นยำของแบบจำลองความต้านทานทางความร้อน 2 มิติ ที่นำเสนอนี้ใช้กับรูปทรงแท่งสี่เหลี่ยมหน้าตัดมีรูกลวงกลมตลอดกึ่งกลางหน้าตัด เพื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณทางจากตารางเชฟแฟคเตอร์ในกรณีของ Circular cylinder of length L in a square solid of equal length



รูปที่1 แท่งสี่เหลี่ยมมีรูกลวงกลมตลอดกึ่งกลางหน้าตัด(Circular cylinder of length L in a square solid of equal length)

2. ทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน 2 มิติ โดยใช้เชฟแฟคเตอร์

ในที่นี้จะกล่าวถึงการคำนวณการถ่ายเทความร้อนสำหรับรูปทรงแท่งสี่เหลี่ยมหน้าตัดมีรูกลวงกลมตลอดกึ่งกลางหน้าตัด ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้[3]

2.1 สมการการคำนวณอัตราการถ่ายเทความร้อน

อัตราการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิววัสดุ 2 ด้าน สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\dot{Q} = Sk\left(T_2 - T_1\right) \qquad (1)$$

เมื่อ $\dot{Q}$ - อัตราการถ่ายเทความร้อน(W)

S - เชฟแฟคเตอร์ของการนำความผ่านเนื้อวัสดุ

k - สภาพการนำความร้อนเนื้อวัสดุ (W/m.$^{\circ}$C)

T_1,T_2 - อุณหภูมิผิววัสดุทั้ง 2 ด้าน โดยที่มีการกระจายอุณหภูมิเท่ากันตลอดผิว(Uniform tempareture) ($^{\circ}$C)

2.2 ค่าเชฟแฟคเตอร์

จากตารางเชฟแฟคเตอร์ในกรณีของ Circular cylinder of length L in a square solid of equal length

$$S = \frac{2\pi l}{\ln(1.08w/D)} \qquad (2)$$

โดย w>D และ l>>>w

เมื่อ l - ความยาวแท่งสี่เหลี่ยม (m)

w - ความกว้างหน้าตัดท่อเหลี่ยม (m)

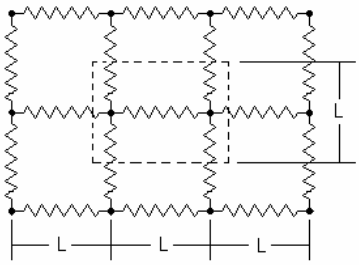
D - เส้นผ่าศูนย์กลางรูกลวง (m)

3.การวิเคราะห์แบบวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์

บทความนี้กำหนดให้ชิ้นเล็กๆแต่ละชิ้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด L x L และมีความหนา 1 m

3.1 ตัวต้านทานการนำความร้อนในเนื้อวัสดุ

กำหนดให้มุมทั้ง 4 ของแต่ละชิ้นมีการถ่ายเทความร้อนผ่านตัวต้านทานการนำความร้อนดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 การถ่ายเทความร้อนระหว่างหัวมุมของแต่ละชิ้นในเนื้อวัสดุ

จากรูปที่ 2 พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างจุดในกรอบเส้นประ เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อนสามารถหาค่าได้ดังนี้[6]

$$R_{Cond} = \frac{L}{kA_n} \qquad (3)$$

เมื่อ R_{cond} - ความต้านทานความร้อนระหว่าง 2 จุด($^{\circ}$C/W)

L - ความยาว Element (m)

k - สภาพการนำความร้อน (W/m.$^{\circ}$C)

A_n - พื้นที่ในแนวตั้งฉากการถ่ายเทความร้อน (m^2)

$A_n = L*1 = L \quad m^2$

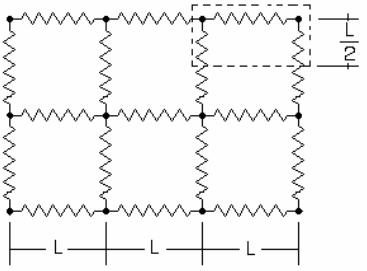
แทนค่า A_n ในสมการ(3)

$$R_{Cond,inside} = \frac{L}{kL} = \frac{1}{k} \qquad (4)$$

เมื่อ $R_{Cond,inside}$ - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุ ($^{\circ}$C/W)

3.2 ตัวต้านทานการนำความร้อนบริเวณขอบวัสดุ

กำหนดให้มุมทั้ง 2 ของแต่ละชิ้นบริเวณผิวด้านบนมีการถ่ายเทความร้อนผ่านตัวต้านทานการนำความร้อนดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 การถ่ายเทความร้อนระหว่างหัวมุมของแต่ละชิ้นบริเวณขอบเนื้อวัสดุ

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างจุดในกรอบเส้นประสามารถหาค่าพื้นที่ในแนวตั้งฉากความร้อนไหลผ่านดังนี้ได้ดังนี้

$A_n = (L/2)*1 = L/2 \quad m^2$

แทนค่า A_n ในสมการ(3)

$$R_{Cond,edge} = \frac{L}{k[\frac{L}{2}]} = \frac{2}{k} \qquad (5)$$

เมื่อ $R_{Cond,edge}$ - ความต้านทานความร้อนบริเวณขอบวัสดุ ($^{\circ}C/W$)

4.การคำนวณเปรียบเทียบ

กำหนดให้แท่งแก้ว(Glass,Lead or window)สี่เหลี่ยมมีขนาดหน้าตัด(wxw) 30X30 mm^2. ยาว(l) 1 m. มีรูกลวงเป็นวงกลมตลอดกึ่งกลางหน้าตัด ผนังรูมีอุณหภูมิ(T_1) 70 $^{\circ}C$ ผิวด้านนอกแท่งแก้วมีอุณหภูมิ(T_2) 20 $^{\circ}C$ และค่าสภาพการนำความร้อนของแก้ว(k) 0.7 W/m.$^{\circ}C$[2][6]

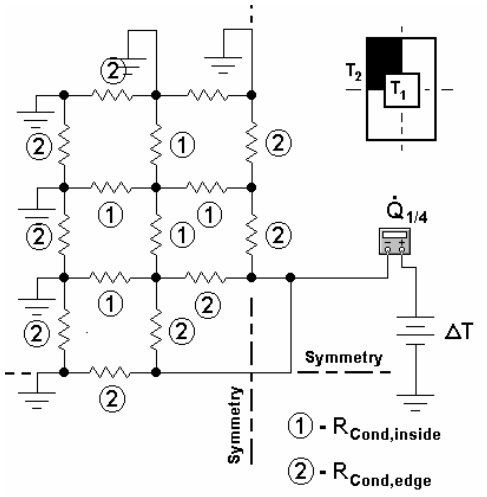
4.1 คำนวณโดยใช้เชฟแฟคเตอร์

ตารางที่ 1 รายการคำนวณรูกลวงขนาดต่างๆ โดยวิธีเชฟแฟคเตอร์

รายการคำนวณ	D = 10 mm	D = 6 mm	D = 4 mm
S(m)	5.344783816	3.725800051	3.003629835
$\dot{Q}$ (W)	187.0674335	130.4030018	105.1270442

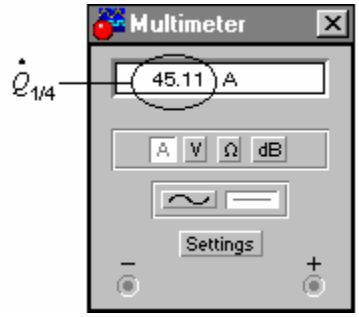
4.2 คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์

สำหรับการคำนวณนี้ใช้โปรแกรมอิเลคทรอนิคเวอร์คเบนช์คำนวณ แต่อย่างไรก็ตามสามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอื่นๆ ก็ได้



รูปที่ 4 วงจรไฟฟ้าในโปรแกรมอิเลคทรอนิคเวอร์คเบนช์ สำหรับการคำนวณหนึ่งในสี่ของหน้าตัด โดยใช้ 5 element

ในที่นี้จะคำนวณเพียง 1/4 ของหน้าตัดเท่านั้น แล้วจึงนำผลลัพธ์ที่ได้มาคูณด้วย 4 เป็นคำตอบในภายหลัง เริ่มต้นด้วยการแบ่งหน้าตัดแท่งแก้วออกเป็นชิ้นเล็กๆเป็นชิ้นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด(LxL) 1x1 mm^2 จะได้จำนวน 225 ชิ้น โดยแต่ละชิ้นให้มีความหนาเท่ากับ 1 m แล้วคำนวณค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุ จาก(4) $R_{Cond,inside}$ = 1.428571428571 $^{\circ}C/W$ และคำนวณความต้านทานความร้อนบริเวณขอบวัสดุ จาก(5) $R_{Cond,edge}$ = 2.857142857143 $^{\circ}C/W$ หลังจากนี้ให้เขียนตัวต้านทานลงใน Work sheet ในโปรแกรมอิเลคทรอนิคเวอร์คเบนช์ แสดงดังรูปที่ 4 แล้วจึงให้โปรแกรมคำนวณอัตราการถ่ายเทความร้อน($\dot{Q}_{1/4}$) ดังรูปที่ 5 ซึ่งค่ากระแสไฟฟ้าที่ได้คืออัตราการถ่ายเทความร้อนนั่นเอง



รูปที่ 5 ผลการคำนวณด้วยโปรแกรมอิเลคทรอนิคเวอร์คเบนช์ สำหรับรูกลวงขนาด 10 mm

ผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมเป็นดังนี้

ตารางที่ 2 รายการคำนวณรูกลวงขนาดต่างๆ โดยวิธีไฟไนต์รีซีสแทนซ์

รายการคำนวณ	D = 10 mm	D = 6 mm	D = 4 mm
Element(ชิ้น)	205	217	221
$\dot{Q}_{1/4}$(W)	45.11	31.67	26.65
$\dot{Q}$ (W)	180.44	126.68	106.60

5. วิเคราะห์ผล

จากค่าความผิดพลาดที่แตกต่างจากทฤษฎี(%Error) โดยนำตารางที่ 2 มาหาค่าแตกต่างจากตารางที่ 1 ได้ค่าความผิดพลาดดังนี้

ตารางที่ 3 แสดงค่าความผิดพลาดที่รูกลวงขนาดต่างๆ

รายการคำนวณ	D = 10 mm	D = 6 mm	D = 4 mm
Error(%)	-3.54280453	-2.85499701	1.401119770

จะเห็นได้ว่าเป็นค่าที่ยอมรับได้ในเชิงวิศวกรรม แต่อย่างไรก็ตามสูตรที่ใช้หาค่าเชฟแฟคเตอร์เป็นสูตรที่ได้จากการทดลอง(Empiregal formula) ซึ่งมีความผิดพลาดจากการแปลงข้อมูลผลการทดลองให้ออกมาเป็นสูตรหรือสมการสั้นๆ พร้อมทั้งกำหนดเงื่อนไขการใช้สมการ (Restriction) ดังนั้นค่าความผิดพลาดนี้อาจจะมากกว่าหรือน้อยกว่าค่าจริงเป็นจำนวนเท่าใดไม่ทราบได้ แต่สามารถนำมาใช้ในการคำนวณทดแทนทฤษฎีเชฟแฟคเตอร์ได้

6. สรุป

เมื่อกำหนดให้แท่งแก้วสี่เหลี่ยมมีขนาดหน้าตัด 30X30 mm^2. ยาว 1 m. มีรูกลวงเป็นวงกลมตลอดกึ่งกลางหน้าตัด ผนังรูมีอุณหภูมิ 70 $^{\circ}C$ ผิวด้านนอกแท่งแก้วมีอุณหภูมิ 20 $^{\circ}C$ และค่าสภาพการนำความร้อนของแก้ว 0.7 W/m.$^{\circ}C$ กรณีรูกลวงมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 10 mm. เมื่อแบ่งเนื้อวัสดุเป็นชิ้นเล็กจำนวน 205 ชิ้น ปรากฏว่ามีความผิดพลาด -3.54 %, กรณีรูกลวงมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 6 mm. เมื่อแบ่งเนื้อวัสดุเป็นชิ้นเล็กจำนวน 217 ชิ้น ปรากฏว่ามีความผิดพลาด -2.85 % และ

กรณีรูกลวงมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 4 mm. เมื่อแบ่งเนื้อวัสดุเป็นชิ้นเล็กจำนวน 221 ชิ้น ปรากฏว่ามีความผิดพลาด 1.40 %

ดังนั้นแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความต้านทานทางความร้อนนี้สามารถคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์ 2 มิติ ร่วมกับโปรแกรมสำเร็จรูปวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าได้

เอกสารอ้างอิง

[1] ประเสริฐ อินประเสริฐ, "การคำนวณการถ่ายเทความร้อนผ่านครีบระบายความร้อนด้วยวิธีไฟไนต์รีซีสแทนซ์กรณีปลายครีบมีการถ่ายเทความร้อน", การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 17, ปี พ.ศ. 2546, หน้า 116-119

[2] Adrian Bejan; 'Heat transfer'; U.S.A. ; Duke University; John Wiley&Sons,Inc; 1993; pp 625

[3] Frank W. Schmidt, Robert E. Henderson, Carl H. Wolgemuth.; U.S.A.; The Pensylvania State University; 'Introduction to Thermal Sciences'; Second edition; John Wiley&Sons,Inc; Singapore; 1993; pp 315-319

[4] Jan F. Kreider, Ari Rabl; New York; University of Colorado at Boulder; 'Heating and Cooling of Buildings'; McGraw-Hill, inc; 1994; pp 370-378

[5] Satish P. Ketkar,Ph.D; The MacNeal-Schwendler Corporation; 'Numerical thermal analysis'; U.S.A.; ASME Press; New York; 1999; pp 63-70

[6] Yunus A. Cengel; 'Heat Transfer a Practical Approach'; U.S.A.; University of Nevada,Reno; McGraw-Hill, Inc; 1998; pp 226,957