การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 18
18-20 ตุลาคม 2547 จังหวัดขอนแก่น

การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิของวัตถุทรงกลมที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อสม่ำเสมอด้วยวิธีรีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

How to calculate tempareture response of a lumped system By resistance-capacitance method

ประเสริฐ อินประเสริฐ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม
235 ถนนเพชรเกษม เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10163
โทร. 457-0068 ต่อ 121, โทรสาร 457-3982, อีเมล์ Prasert_Inp@yahoo.com

Prasert Inprasert
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Siam University
235 Petkasem Road, Phasicharoen, Bangkok 10163
Tel: 457-0068 Ext 121, Fax: 457-3982, E-Mail: Prasert_Inp@yahoo.com

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิที่เปลี่ยนไปตามเวลาของวัตถุทรงกลมที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อสม่ำเสมอด้วยวิธีรีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์ โดยกำหนดให้แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนประกอบด้วยตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว โดยใช้โปรแกรมอิเลคทรอนิคเวอร์คเบนช์คำนวณแบบจำลองวิธีรีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์นี้เปรียบเทียบกับผลการคำนวณทางทฤษฎีว่าอุณหภูมิที่ได้มีความผิดพลาดเพียงใด เมื่อกำหนดให้ทรงกลมขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 10 mm. มีอุณหภูมิเริ่มต้น 15 ^{o}C ทำด้วยเหล็กกล้า AISI 1010 มีค่าสภาพการนำความร้อน 63.9 W/m.^{o}C, ความหนาแน่น 7832 kg/m^{3} และความความร้อนจำเพาะ 434 J/kg. ^{o}C อยู่ในอากาศอุณหภูมิ 60 ^{o}C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน 20 W/m^{2}.^{o}C เมื่อคำนวณด้วยโปรแกรมถึงวินาทีที่ 1000 ปรากฏว่ามีความผิดพลาดเพียง -0.13 % จากค่าความผิดพลาดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความร้อนรีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์ที่นำเสนอนี้สามารถคำนวณโดยทฤษฎีวงจรไฟฟ้าได้ ซึ่งจะเป็นการง่ายในการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางไฟฟ้าคำนวณปัญหาความร้อนที่มีความซับซ้อนต่อไป

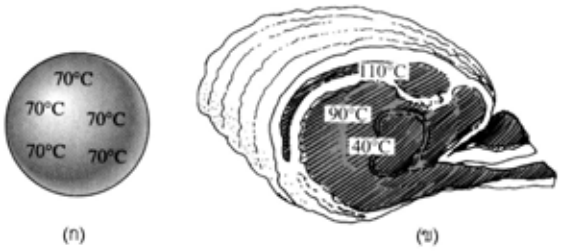
Abstract

This paper present to calculate the tempareture response of a lumped system by resistance-capacitance method. This heat transfer model have a conduction resistance and a heat capacitance. Using a ELECTRONIC WORKBENCH software to calculate this resistance-capacitance model and compare with analytical method to find an error of tempareture response. The calculation let a sphare, 10 mm in diameter initially at 15 ^{o}C made form AISI 1010 which have thermal conductivity 63.9 W/m.^{o}C, density 7832 kg/m^{3} and specific heat 434 J/kg. ^{o}C This object is placed in air stream at 60 ^{o}C. Estimate the convection heat transfer coefficient is 20 W/m^{2}.^{o}C. Calculating by this software at 1000 sec having an error result -0.13 %. From the error result show that this resistance-capacity model can be calculated by electrical theory which easy to use an electrical software to calculate the complicated heat transfer problem on the future.

1. บทนำ

บทความนี้นำเสนอการคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิที่เปลี่ยนไปตามเวลาด้วยวิธีรีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์ ซึ่งการถ่ายเทความร้อนจากจุดหนึ่งในเนื้อวัสดุไปยังอีกจุดหนึ่งนั้นขึ้นอยู่กับสภาพการนำความร้อนของวัสดุนั้นๆ กรณีเทียบเคียงกับค่าทางไฟฟ้าคือสภาพการนำไฟฟ้าของวัสดุเมื่อเทียบเคียงกับสัญญลักษณ์อุปกรณ์ทางไฟฟ้าก็จะเป็นตัวต้านทานไฟฟ้าหรือรีซิสเตอร์นั่นเอง และจากความจริงที่ว่าวัสดุเมื่อได้รับพลังงานความร้อนเพิ่มขึ้นจะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นและเมื่อสูญเสียความร้อนอุณหภูมิจะลดลง ซึ่งสามารถคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงอุณหูมิได้โดยทราบค่าความร้อนจำเพาะหรือค่าความจุความร้อนของวัสดุนั้นๆ กรณีเทียบเคียงกับสัญญลักษณ์และอุปกรณ์ทางไฟฟ้าก็จะเป็นตัวเก็บประจุไฟฟ้าหรือคาปาซิเตอร์นั่นเอง

สำหรับบทความนี้นำวิธีรีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์มาประยุกต์ใช้กับวัตถุทรงกลมที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อสม่ำเสมอโดยกำหนดให้แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนประกอบด้วยตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว แล้วใช้โปรแกรมอิเลคทรอนิคเวอร์คเบนช์ซึ่งเป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้ในการคำนวณวงจรทางไฟฟ้าทั่วไป คำนวณแบบจำลองนี้เปรียบเทียบกับผลการคำนวณทางทฤษฎีว่าอุณหภูมิตอบสนองที่ได้มีความผิดพลาดเพียงใด



รูปที่1 (ก)วัตถุที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อสม่ำเสมอ(Lumped system) (ข) วัตถุที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อไม่สม่ำเสมอ[6]

2. การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน

ในที่นี้จะกล่าวถึงการคำนวณการถ่ายเทความร้อนสำหรับวัตถุทรงกลมที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อสม่ำเสมอ

2.1 เงื่อนไขการคำนวณ

วัตถุทรงกลมที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อสม่ำเสมอหมายถึงอุณหภูมิมีค่าเท่ากันตลอดรัศมีทรงกลม(dT/dr=0) ซึ่งจะเป็นไปได้เมื่อสภาพการนำความร้อนวัสดุที่ค่าสูงมาก, สัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่ผิววัสดุต่ำมาก หรือรัศมีทรงกลมมีค่าน้อย ความสัมพันธ์ของเงื่อนไข 3 ประการ แสดงเป็นค่า Biot number ถ้าผลการคำนวณค่า Bi < 0.1 จะเป็นค่าที่ยอมรับได้ว่าการกระจายอุณหภูมิแตกต่างกัน < 5 %[2]

$$B_i = \frac{\bar{h} L_r}{k} \qquad (1)$$

โดย

$$L_r = \frac{V}{A_s} \qquad (2)$$

เมื่อ h - สัมประสิทธิ์การพาความร้อน (W/m^2.$^\circ$C)

L_r - ความยาวเทียบเท่ารัศมีทรงกลม (m)

k - สภาพการนำความร้อนวัสดุ (W/m.$^\circ$C)

V - ปริมาตรวัสดุ (m^3)

A_s - พื้นที่ผิววัสดุ (m^2)

2.2 อุณหภูมิวัตถุที่เวลาใด ๆ

สมการที่ใช้หาค่าอุณหภูมิวัสดุที่เวลาใดๆเป็นดังนี้[2]

$$T = T_\infty + (T_i - T_\infty)\, e^{-t/\tau} \qquad (3)$$

โดย

$$\tau = \frac{\rho V C_p}{\bar{h} A_s} \qquad (4)$$

เมื่อ T - อุณหภูมิวัสดุที่เวลา t ($^\circ$C)

T_∞ - อุณหภูมิของไหล ($^\circ$C)

T_i - อุณหภูมิเริ่มต้นของวัสดุ ($^\circ$C)

t - เวลาที่ผ่านไป (s)

τ - ค่าคงที่เวลา (s)

ρ - ความหนาแน่นของวัสดุ (kg/m^3)

C_p - ความร้อนจำเพาะของวัสดุ (J/kg.$^\circ$C)

3.การวิเคราะห์แบบวิธีรีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนที่ใช้นี้ประกอบด้วยตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว

3.1 ตัวต้านทานการพาความร้อน

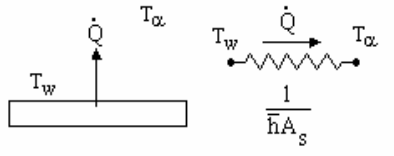
จากสมการพาความร้อน[6]

$$\dot{Q} = \bar{h} A_s \Delta T = \frac{\Delta T}{\left[\frac{1}{\bar{h} A_s}\right]} \qquad (5)$$

ดังนั้นจะได้

$$R_{conv} = \frac{1}{\bar{h} A_s} \qquad (6)$$

เมื่อ R_{Conv} - ความต้านทานการพาความร้อน($^\circ$C/W)



รูปที่ 2 สัญญลักษณ์การคำนวณสำหรับการพาความร้อนจากผนัง(T_w)สู่อากาศ(T_α)

3.2 ตัวเก็บความร้อน

พิจารณานิยามการไหลกระแสไฟฟ้า[1]

$$i = \frac{q}{t} \quad (7)$$

เมื่อ I - กระแสไฟฟ้าหรืออัตราการไหลประจุไฟฟ้า(A)

q - ประจุไฟฟ้า(C)

พิจารณานิยามอัตราการถ่ายเทความร้อน

$$\dot{Q} = \frac{Heat}{t} \quad (8)$$

เมื่อ Heat - ปริมาณความร้อน[J]

เปรียบเทียบสมการที่ (7) และ (8) ในการคำนวณการถ่ายเทความร้อนโดยใช้วงจรไฟฟ้า จะได้ว่าความร้อน(Heat)ใช้แทนในความหมายของประจุไฟฟ้า(q)

พิจารณาความจุไฟฟ้าของตัวเก็บประจุ

$$C_e = \frac{q}{\Delta V_e} \quad (9)$$

เมื่อ C_e - ความจุไฟฟ้า(F)

ΔV_e - ความต่างศักย์ไฟฟ้า(V)

ในการคำนวณการถ่ายเทความร้อนโดยใช้วงจรไฟฟ้า ได้มีการใช้ความแตกต่างอุณหภูมิ(ΔT)แทนในความหมายของความต่างศักย์ไฟฟ้า(ΔV_e) ดังนั้นความจุความร้อนจะมีสมการดังนี้

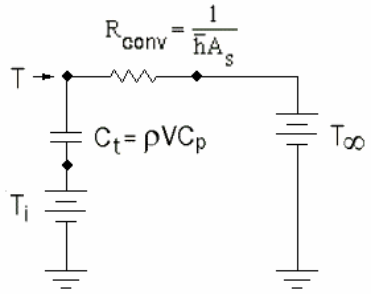
$$C_t = \frac{Heat}{\Delta T} \quad (10)$$

เมื่อ C_t - ความจุความร้อน(J/$^\circ$C)

จากหน่วยของค่าความจุความร้อน(J/$^\circ$C)เมื่อเปรียบเทียบกับหน่วยของความร้อนจำเพาะของวัสดุ(J/kg.$^\circ$C)แล้ว สมการความจุความร้อนจะเป็นดังนี้[5]

$$C_t = mC_p = \rho V C_p \quad (11)$$

เมื่อ m - มวลวัสดุ(kg)



รูปที่ 3 แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนประกอบด้วยตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว

จากสมการที่(4) สามารถเขียนในรูปของรีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์ได้ดังนี้(4)

$$\tau = R_{conv} C_t \quad (12)$$

4.การคำนวณเปรียบเทียบ

กำหนดให้ทรงกลมขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 10 mm. มีอุณหภูมิเริ่มต้น(T_i) 15 $^\circ$C อยู่ในอากาศอุณหภูมิ(T_∞) 60 $^\circ$C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน(h) 20 W/m^2.$^\circ$C ทำด้วยเหล็กกล้า AISI 1010 มีค่าสภาพการนำความร้อน(k) 63.9 W/m.$^\circ$C, ความหนาแน่น(ρ) 7832 kg/m^3 และความความร้อนจำเพาะ(Cp) 434 J/kg. $^\circ$C[3]

ซึ่งคำนวณค่าต่างๆได้ดังนี้

V (ปริมาตรทรงกลม) = $5.235987755983(10^{-7})$ m^3

A_s(พื้นที่ผิวทั้งหมด) = $3.14159265359(10^{-4})$ m^2

L_r(ความยาวเทียบเท่ารัศมีทรงกลม)= $1.666666666667(10^{-3})$ m

Bi = $5.216484089724(10^{-4})$

ค่า Bi น้อยกว่า 0.1 สามารถคำนวณโดยให้เนื้อวัสดุมีการกระจายอุณหภูมิอย่างสม่ำเสมอได้(Lumped system)

4.1 คำนวณด้วยทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน

มีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1.คำนวณค่าค่าคงที่เวลา จากสมการที่ (4)

τ = 283.2573333333 s

2.คำนวณอุณหภูมิ จากสมการที่ (3) ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 อุณหภูมิวัตถุที่เวลาต่างๆ

เวลา(s)	400	700	1000
อุณหภูมิ($^\circ$C)	49.03707641	56.19844050	58.68175179

4.2 คำนวณด้วยวิธีรีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

สำหรับการคำนวณนี้ใช้โปรแกรมอิเลคทรอนิคเวอร์คเบนช์คำนวณแต่อย่างไรก็ตามสามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอื่นๆก็ได้

มีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

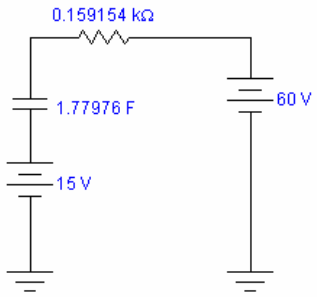
1.คำนวณความต้านทานการพาความร้อน จากสมการที่ (6)

R_{Conv} = 159.1549430919 $^\circ$C/W

2.คำนวณความจุความร้อน จากสมการที่ (10)

C_t = 1.779758314951 J/$^\circ$C

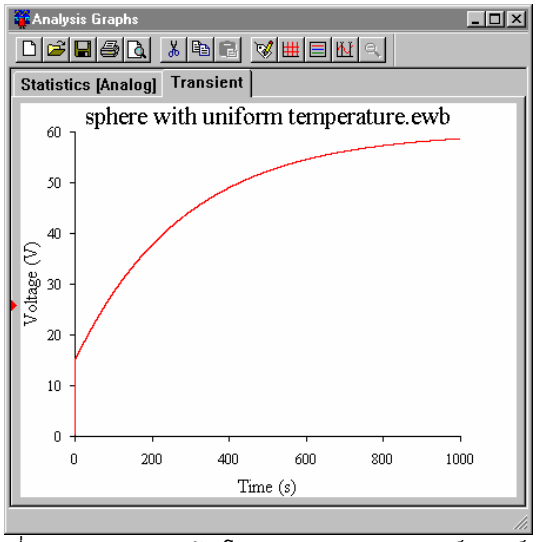
3.เขียนวงจรไฟฟ้าลงใน Work sheet โปรแกรมสำเร็จรูป ตามรูปที่ 3 จะได้ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 วงจรไฟฟ้าของการถ่ายเทความร้อนสำหรับวัตถุทรงกลมที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อสม่ำเสมอ

4.ให้โปรแกรมคำนวณการเปลี่ยนแปลงศักย์ไฟฟ้า(V)ที่รอยต่อระหว่างตัวต้านทานกับตัวเก็บประจุ ซึ่งค่าที่ได้นี้คือการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ(T)นั่นเอง โดยในที่นี้จะคำนวณถึงวินาทีที่ 1000

โปรแกรมจะเขียนกราฟแสดงการการเปลี่ยนแปลงศักย์ไฟฟ้า(V) หรืออุณหภูมิ(T) ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 ผลการคำนวณด้วยโปรแกรมอิเลคทรอนิคเวอร์คเบนช์ จากเวลา 0 ถึง 1000 วินาที

ซึ่งจะอ่านค่าอุณหภูมิจากกราฟได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 อุณหภูมิวัตถุที่เวลาต่างๆ

เวลา(s)	400	700	1000
อุณหภูมิ($^{\circ}$C)	49.06976744	56.16279070	58.60465116

5. วิเคราะห์ผล

หาค่าความผิดพลาดที่แตกต่างจากทฤษฎี(%Error) โดยนำตารางที่ 2 มาหาค่าแตกต่างจากตารางที่ 1 ได้ค่าความผิดพลาดดังนี้

ตารางที่ 3 แสดงค่าความผิดพลาดของอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ

เวลา(s)	400	700	1000
Error(%)	0.066665944	- 0.06343557	- 0.13138770

จะเห็นได้ว่าที่เวลาน้อยๆอุณหภูมิที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าทฤษฎี และเมื่อเวลามากขึ้นอุณหภูมิที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าทฤษฎี แต่อย่างไรก็ตามค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำมาก ถึงแม้ว่าเวลาผ่านไป 1000 s($\cong 3.50\tau$)

จากกราฟเวลาที่มากกว่า 1000 s นั้น อุณหภูมิจะเข้าใกล้ T_{∞} มากยิ่งขึ้น

6. สรุป

เมื่อกำหนดให้ทรงกลมขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 10 mm. มีอุณหภูมิเริ่มต้น 15 $^{\circ}$C ทำด้วยเหล็กกล้า AISI 1010 มีค่าสภาพการนำความร้อน 63.9 W/m.$^{\circ}$C, ความหนาแน่น 7832 kg/m^3 และความความร้อนจำเพาะ 434 J/kg. $^{\circ}$C อยู่ในอากาศอุณหภูมิ 60 $^{\circ}$C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน 20 W/m^2.$^{\circ}$C ปรากฏว่าที่เวลาน้อยๆอุณหภูมิที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าทฤษฎีและเมื่อเวลามากขึ้นอุณหภูมิที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าทฤษฎี แต่อย่างไรก็ตามค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำมาก และเมื่อคำนวณหาอุณหภูมิวัตถุที่เวลา 1000 s มีความผิดพลาดเพียง -0.13 % เท่านั้น

ดังนั้นเห็นได้ว่าการคำนวณการถ่ายความร้อนด้วยวิธีไร้ซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์ ให้คำตอบที่น่าเชื่อถือได้

เอกสารอ้างอิง

[1] A.Bruce Carlson; David G. Gisser; 'Electrical engineering concepts and application'"; 2nd; U.S.A. ; Rensselaer Polytechnic Institute; Addison-Wesley Publishing Company; 1990; pp 11-12

[2] Frank P. Incropera; David P. DeWitt; 'Introduction to Heat Transfer'; 3nd; U.S.A. ; Purdue University; John Wiley&Sons,Inc; 1993; pp 212-218

[3] Frank W. Schmidt, Robert E. Henderson, Carl H. Wolgemuth.; U.S.A.; The Pensylvania State University; 'Introduction to Thermal Sciences'; Second edition; John Wiley&Sons,Inc; Singapore; 1993; pp 431

[4] Jan F. Kreider, Ari Rabl; New York; University of Colorado at Boulder; 'Heating and Cooling of Buildings'; McGraw-Hill, inc; 1994; pp 370-381

[5] Satish P. Ketkar,Ph.D; The MacNeal-Schwendler Corporation; 'Numerical thermal analysis'; U.S.A.; ASME Press; New York; 1999; pp 59-70

[6] Yunus A. Cengel; 'Heat Transfer a Practical Approach'; U.S.A.; University of Nevada,Reno; McGraw-Hill, Inc; 1998; pp 226