

การควบคุมแบบคงทนสำหรับการรักษาเสถียรภาพของระนาบ

Robust Control for Platform Stabilization

ทศพล แจ่มน้อย^{1,*}, สโรช ไทรเมฆ²

¹ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์

²ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ และสถาบันวิทยาการหุ่นยนต์ภาคสนาม (FIBO)

^{1,2}มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี 126 แขวงบางมด เขตทุ่งครุ กรุงเทพฯ 10140

*ผู้ติดต่อ: e-mail: tossapol_j@hotmail.com

บทคัดย่อ

บทความนี้ศึกษาการจำลองการควบคุมแผ่นระนาบโดยใช้การควบคุมแบบคงทน แผ่นระนาบประกอบไปด้วยถังทรงตัวจำนวนสี่ใบ ซึ่งติดตั้งที่มุมของแผ่นระนาบ และมีจุดหมุนที่จุดกึ่งกลางของแผ่นระนาบ แผ่นระนาบนี้สามารถเคลื่อนไหวได้สององศาอิสระ คือมุมลาดเอียง (θ) และมุมโคลง (ϕ) โดยการควบคุมจะใช้ผลต่างของระดับน้ำมาเป็นตัวควบคุม การออกแบบตัวควบคุมจะใช้แบบจำลองเชิงเส้น บทความนี้จะใช้ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ (H_∞) และการสังเคราะห์มิว (μ -Synthesis) โดยมีความต้องการรักษาเสถียรภาพระนาบที่ภาวะสมดุลและติดตามสัญญาณอ้างอิงที่กำหนดได้ การออกแบบตัวควบคุมเริ่มจากการจำลองพลวัตของระบบ และพิจารณาความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นกับระบบ จากนั้นก็ทำการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะของระบบ จากผลการจำลอง ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้และการสังเคราะห์มิวจะมีเสถียรภาพและสมรรถนะที่ดี ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันน้ำหนักที่พิจารณาจากความไม่แน่นอนของระบบ ซึ่งตัวควบคุมทั้งสองสามารถที่จะติดตามสัญญาณอ้างอิงได้ในขณะที่มีการรบกวนจากสัญญาณภายนอก ซึ่งแสดงว่าตัวควบคุมที่ออกแบบมีความคงทนจริง

คำหลัก: การควบคุมแบบคงทน, เอชอินฟินิตี้, การสังเคราะห์มิว, การรักษาเสถียรภาพของระนาบ

Abstract

This paper proposed control simulation on a platform using robust control strategy. The platform consists of four bladders which are placed at the corners and has a rotating point at the center of the platform. This platform can moved freely in both pitching (θ) and rolling (ϕ) angles. The differences of water level in the bladders created control torques for the platform. The controller design was derived from a linear dynamical model. H_∞ and μ -Synthesis controller were used in this project. Our requirements were stabilize the platform to its equilibrium and to track any reference signals. The controller design began with the dynamic model of the system. Then an uncertainty of the system was considered which was very important process for the control. The stability and performance of the system are to be analyzed afterward. From the simulation results, stability and performance of H_∞ and μ -Synthesis controller dependent on weighting function that considered from the uncertainty of the system. Which both controller can be tracked reference signal, while have disturbance from external signal. This indicated that controllers have robustness.

Keywords: Robust control, H_∞ , μ -Synthesis, Platform Stabilization

1. บทนำ

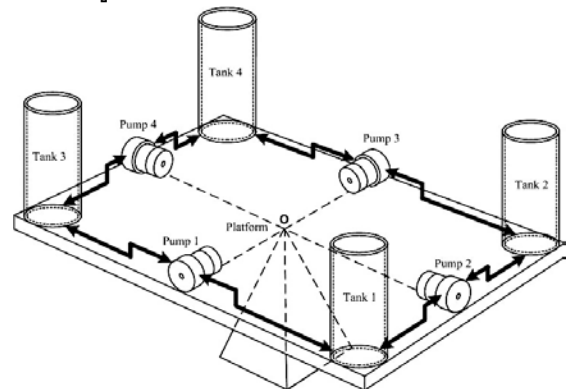
ในการออกแบบตัวควบคุม โดยปกติเราต้องการแบบจำลองพลวัตของระบบที่ต้องการควบคุม อย่างไรก็ตามระบบที่เราต้องการควบคุมส่วนใหญ่มีคุณสมบัติไม่เชิงเส้น เมื่อนำมาใช้ในการออกแบบตัวควบคุม อาจจะมีผลที่ซับซ้อน และอาจส่งผลต่อความคงทนของระบบ เมื่อเราทำให้ระบบเป็นเชิงเส้นแล้ว พฤติกรรมบางอย่างของระบบอาจสูญหายไป และในการสร้างแบบจำลองพลวัตที่ถูกต้องเป็นไปได้ยากหรือแทบเป็นไปได้ไม่ได้ เมื่อพิจารณาการหาแบบจำลองพลวัตที่ไม่ถูกต้องและตัวแปรที่ไม่เป็นเชิงเส้นก็จะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนจากระบบจริงมากขึ้น ซึ่งความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นใน 2 กรณีที่ได้กล่าวมาเราจะเรียกว่า ความไม่แน่นอน(Uncertainty) ของระบบ

บทความนี้นำเสนอการควบคุมแบบคงทน ซึ่งเป็นการควบคุมที่ พิจารณา ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นกับระบบ ซึ่งโดยปกติตัวควบคุมแบบพีไอดี (PID) หรือแบบเหมาะสมที่สุด (Optimal Control) จะไม่มีการพิจารณาความไม่แน่นอนของระบบในการออกแบบตัวควบคุม บทความนี้จะใช้การรักษาเสถียรภาพของระบบเป็นระบบตัวอย่างในการออกแบบตัวควบคุม โดยระบบนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการรักษาเสถียรภาพของหุ่นยนต์ปลาหรือยานใต้น้ำได้อีกในอนาคต ซึ่ง การศึกษาการรักษาเสถียรภาพของระบบเริ่มต้นโดย [5] ซึ่งมีจุดประสงค์ใช้เป็นอุปกรณ์การสอนในด้าน การควบคุมอัตโนมัติ โดย ระบบ สามารถเคลื่อน ไหว ได้หนึ่ง องศาอิสระ และต่อมา [1] ได้ทำการศึกษาการรักษาเสถียรภาพของระบบโดยใช้ผลต่างของระดับน้ำมาเป็นตัวควบคุม ซึ่งระบบสามารถเคลื่อนไหวได้สององศาอิสระ

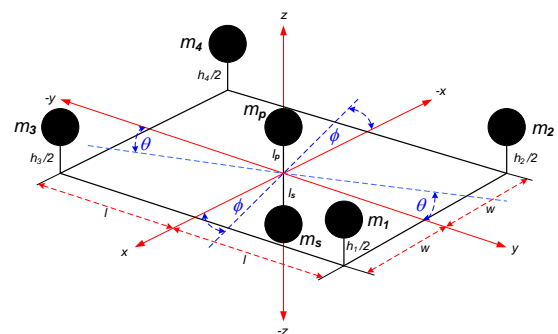
บทความนี้ประกอบด้วย 6 หัวข้อโดยมี ส่วนที่ 2 เป็นการจำลองพลวัตของระบบ ส่วนที่ 3 เป็นทฤษฎีการควบคุมแบบคงทน ส่วนที่ 4 การออกแบบตัวควบคุม ส่วนที่ 5 การวิเคราะห์การมีเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบ ส่วนที่ 6 เป็นผลการจำลองการทำงานของระบบ และส่วนที่ 7 เป็นการสรุปผลการจำลองการทำงานของระบบ

2. แบบจำลองพลวัต (Dynamics Model)

โครงสร้างของระบบประกอบด้วยถังทรงตัว 4 ใบ ซึ่งติดตั้งที่มุมทั้ง 4 ของแผ่นระนาบ โดยกำหนดจุดหมุนไว้ที่จุดกึ่งกลางของแผ่น ดังแสดงในรูปที่ 1 แผ่นระนาบสามารถเคลื่อนไหวได้สององศาอิสระคือมุมลาดเอียง (pitch) และมุมโคลง (roll) สามารถควบคุมโดยผลต่างของระดับน้ำ (Δh_θ) และ (Δh_ϕ) ระหว่างถังน้ำที่ติดตั้งอยู่ทั้งสองข้างของแผ่นระนาบ ตามลำดับ



รูปที่ 1 แสดงแบบจำลองสมมูลของแผ่นระนาบ [5] แบบจำลองพลวัตของระบบสร้างขึ้นจากการพิจารณาพลังงานในแบบจำลองสมมูล โดยใช้สมการของลา - กรองจ์ (Lagrange's Equation) แบบจำลองพลวัตของระบบที่ได้จะเป็น แบบจำลอง ไม่เชิงเส้น (Nonlinear) จากนั้นทำการประมาณแบบเชิงเส้น ณ จุดสมดุล เพื่อให้สอดคล้องกับเครื่องมือในการออกแบบระบบควบคุมของเรา



รูปที่ 2 แสดงแบบจำลองสมมูลของแผ่นระนาบ [5] โดยที่ m_1, m_2, m_3, m_4 คือ มวลของถังทรงตัว

h_1, h_2, h_3, h_4 คือ ความสูงของระดับน้ำ

m_p คือ มวลของอุปกรณ์ทั้งหมดในระบบ

m_s คือ มวลที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพ

l_s คือ ระยะห่างจุดหมุนกับมวลสมดุล

เราทำการกำหนดตัวแปรสถานะ (State Variable) และจัดให้อยู่ในรูปปริภูมิสถานะ (State space) ได้เป็น

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Cx + Du \quad (2)$$

โดยที่

$$x = [\theta \quad \dot{\theta} \quad \phi \quad \dot{\phi} \quad \Delta h_\theta \quad \Delta h_\phi \quad Q_1 \quad Q_2]^T$$

$$u = [u_1 \quad u_2]^T$$

โดยที่ x คือตัวแปรสถานะของระบบ, u คือสัญญาณควบคุม โดยรายละเอียด แบบจำลองพลวัตแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นสามารถศึกษาได้จาก [1]

3. การควบคุมแบบคงทน (Robust Control)

3.1 ความไม่แน่นอน (Uncertainty)

ความไม่แน่นอนคือความแตกต่างหรือความคลาดเคลื่อนระหว่างแบบจำลองพลวัตกับระบบจริง ซึ่งสามารถเกิดได้จากหลายสาเหตุ เช่น เกิดจากความผิดพลาดในการตรวจวัด หรือการละเลยแบบจำลองพลวัตบางอย่าง เราสามารถแบ่งออกความไม่แน่นอนเป็น 2 ประเภทคือ

1. ความไม่แน่นอนเชิงตัวแปร (Parametric Uncertainty) คือความไม่แน่นอนที่เกิดจากที่ไม่สามารถตรวจวัดอะไรได้ถูกต้องแม่นยำ

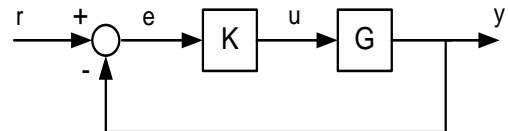
2. ความไม่แน่นอนเชิงพลศาสตร์ (Dynamics Uncertainty) คือ การไม่จำลองพลวัตของระบบบางส่วน

ความไม่แน่นอนสามารถแสดงได้หลายรูปแบบ เช่น ความไม่แน่นอนเชิงการบวก (Additive Uncertainty) ความไม่แน่นอนเชิงการคูณขาเข้า (Input Multiplicative uncertainty) และ ความไม่แน่นอนเชิงการคูณขาออก (Output Multiplicative uncertainty) เป็นต้น โดยรายละเอียด ของความไม่แน่นอนสามารถศึกษาได้จาก [6,7]

3.2 ฟังก์ชันน้ำหนัก (Weighting Function)

สำหรับ บทความนี้ เราจะใช้ความไม่แน่นอน แบบเชิงการคูณขาเข้า (Input Multiplicative uncertainty) ซึ่งความไม่แน่นอน แบบนี้ เหมาะสมกับการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ภายใน และการละเลย

แบบจำลองพลวัตที่ความถี่สูง [6,7] สำหรับระบบที่เราพิจารณาอาจหมายถึงการกระเพื่อมของน้ำในถังทรงตัว ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่เราไม่พิจารณา โดยปกติ ฟังก์ชันน้ำหนักจะอยู่ในรูปเชิงซ้อน (Complex) และจำนวนจริง (Real) พิจารณาโครงสร้างของระบบควบคุมทั่วไป ซึ่งประกอบด้วยตัวควบคุม K และระบบ G เท่านั้น ดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 โครงสร้างของระบบควบคุมทั่วไป

โดยที่ G คือ ระบบที่ต้องการควบคุม

K คือ ตัวควบคุม

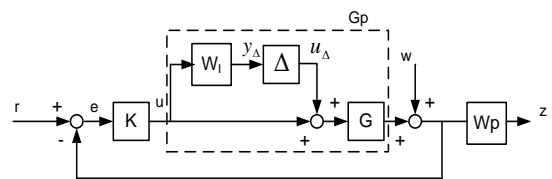
r คือ สัญญาณอ้างอิงขาเข้า

e คือ สัญญาณความผิดพลาด

u คือ สัญญาณควบคุม

y คือ สัญญาณขาออก

จากรูปที่ 3 หากเราพิจารณาสัญญาณรบกวน และความไม่แน่นอนของระบบเพิ่มเข้าไปในระบบ เราจะได้โครงสร้างของระบบภายใต้ความไม่แน่นอนดังแสดงในรูปที่ 4

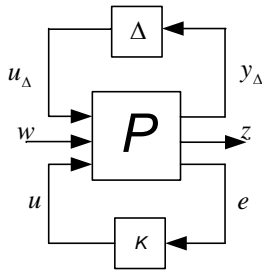


รูปที่ 4 โครงสร้างที่มีการพิจารณาค่าความไม่แน่นอน

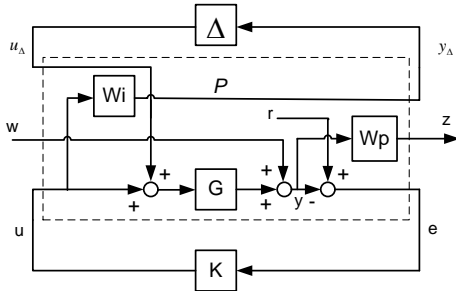
ส่งผลให้ระบบที่ต้องการควบคุมเปลี่ยนไปเป็น

$$G_p = G(I + \Delta W_I) \quad (3)$$

โดยที่ G_p คือระบบที่มีการพิจารณาความไม่แน่นอนเข้าสู่ระบบด้วย, W_p คือ ฟังก์ชันน้ำหนักสำหรับสัญญาณออก และ W_I คือ ฟังก์ชันน้ำหนักสำหรับความไม่แน่นอนของระบบ จากรูปที่ 4 สามารถจัดให้เป็นโครงสร้างการควบคุมแบบคงทนได้ดังแสดงในรูปที่ 5



รูปที่ 5 โครงสร้างของการควบคุมแบบคงทน
ซึ่งมีรายละเอียดโครงสร้างภายในดังรูปข้างล่าง



รูปที่ 6 โครงสร้างภายในของการควบคุมแบบคงทน
เราจะเห็นได้ว่าโครงสร้างของการควบคุมแบบคงทน
เป็นการจัดรูปของสัญญาณเข้าและออกเท่านั้น จาก
รูปที่ 6 เราพบว่าสัญญาณเข้าคือ $[u_\Delta \ w \ u]$ และ
สัญญาณออกคือ $[y_\Delta \ z \ e]$ ภายใต้โครงสร้างของ
การควบคุมแบบคงทน เราสามารถเขียนความสัมพันธ์
ของสัญญาณเข้าและออกในรูปของสมการได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} y_\Delta \\ z \\ e \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u_\Delta \\ w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\Delta \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (4)$$

โดยที่

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_i \\ W_p G & W_p & W_p G \\ -G & -I & -G \end{bmatrix}$$

4. การออกแบบตัวควบคุม (Controller Design)

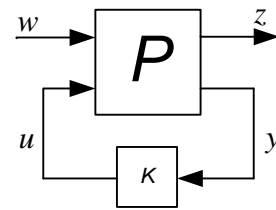
4.1 ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ (H_∞ Controller)

ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะหาตัว
ควบคุมที่ทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพภายใต้เงื่อนไข
ที่ทำให้แอมพลิจูดของเมทริกซ์ถ่ายโอนวงปิดมีค่าที่
ต่ำที่สุด ดังแสดงในสมการที่ 5

$$\min_K \|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (5)$$

ซึ่งหมายความว่า ตัวควบคุมที่ได้คือ K ทำให้เป็น
ระบบวงปิดกับ P จะต้องมีค่านอร์มอนันต์น้อยเท่าที่จะ

เป็นไปได้ และจะต้องมีค่าน้อยกว่า γ โครงสร้างของ
การหาตัวควบคุม แสดงในรูปที่ 8



รูปที่ 8 โครงสร้างของตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้
ซึ่งเราสามารถเขียนความสัมพันธ์จากรูปข้างบนได้
ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (6)$$

โดยที่ x คือ ตัวแปรสถานะของระบบ

w คือ สัญญาณรบกวนจากภายนอก

u คือ สัญญาณการควบคุม

z คือ สัญญาณสมรรถนะ

y คือ สัญญาณที่ได้จากการตรวจวัด

การออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้มีข้อสมมุติฐานดังนี้

1. (A, B_2) ทำให้มีเสถียรภาพได้ (Stabilizable) และ
 (A, C_2) สามารถตรวจจับได้ (Detectable)
2. D_{12} และ D_{21} มีอันดับเต็ม (full rank)
3. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ มีอันดับแนวตั้งเต็มทุก ๆ ความถี่
4. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ มีอันดับแถวเต็มทุก ๆ ความถี่

โดยที่ ข้อสมมุติฐาน ที่ได้กล่าวมานั้นเป็น ข้อ
สมมุติฐานที่พอเพียง (Sufficient) ในการหาคำตอบ
ซึ่งรายละเอียดสามารถศึกษาได้จาก [6,7] การ
ออกแบบตัวควบคุม เอชอินฟินิตี้ จะต้องอาศัยสมการ
ริคคาติสองสมการข้างล่างนี้

$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty = 0 \quad (7)$$

และ

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T + B_1 B_1^T + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty = 0 \quad (8)$$

โดยที่ $X_\infty > 0, Y_\infty > 0$ และ $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

เมื่อแก้สมการที่ (7) และ (8) แล้วเราจะได้อ่า X_∞ และ
 Y_∞ เพื่อหาค่าตัวควบคุม $K(s)$ ตามสมการที่ (9)
ต่อไป

$$K(s) = -F_\infty (sI - A_\infty)^{-1} Z_\infty L_\infty \quad (9)$$

โดยที่

$$A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_2^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$$

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty$$

$$L_\infty = -Y_\infty C_2^T$$

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$$

การที่จะได้มาตามเงื่อนไขสมการที่ 5 และตัวควบคุม K ในสมการที่ 9 เราจะใช้อัลกอริทึมของ Doyle และคณะ [4] โดยการลดค่าของ γ เพื่อให้ได้คำตอบที่เหมาะสมที่สุด เพื่อความสะดวกเราจะใช้คำสั่ง "hinfsyn" ในโปรแกรม MATLAB ซึ่งรายละเอียดสามารถศึกษาได้จาก [2,3]

4.2 การสังเคราะห์มิว (μ -Synthesis)

โดยทั่วไปตัวควบคุมที่ออกแบบภายใต้เงื่อนไขของการควบคุมแบบ เอชอินฟินิตี้จะมีการอนุรักษ์มาก การอนุรักษ์คือความแตกต่างระหว่างแบบจำลองกับระบบจริง ซึ่งส่งผลต่อสมรรถนะที่ลดลงของระบบควบคุม โดยปัญหาที่กล่าวมาข้างต้นสามารถลดได้โดยการสังเคราะห์มิวเพราะการสังเคราะห์มิวมีการพิจารณาโครงสร้างของความไม่แน่นอนด้วย ซึ่งกระบวนการนี้จะใช้ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ ร่วมกับการวิเคราะห์มิว (μ -Analysis) โดย

$$\mu(N) \leq \min_D \bar{\sigma}(DND^{-1}) \quad (10)$$

โดยที่ D คือเมทริกซ์ปรับอัตราส่วน

μ คือค่าเอกฐานแบบมีโครงสร้าง

$\bar{\sigma}$ คือค่าเอกฐานสูงสุด

แนวคิดคือหาตัวควบคุมที่ลดค่ายอดสูงสุดของ

$$\min_K (\min_D \bar{\sigma} \|DND^{-1}\|_\infty) \quad (11)$$

จากสมการที่ 11 หมายความว่าต้องการหาตัวควบคุม K และเมทริกซ์ปรับอัตราส่วน D ที่น้อยที่สุดที่ทำให้สอดคล้องกับสมการที่ 10 โดยกระบวนการหาตัวแปรทั้งสองตัวนั้นจะใช้การวนรอบดีเค (D-K iteration) โดยมีขั้นตอนการคำนวณอยู่ 2 ขั้นตอนคือ ขั้นตอนแรก เป็นการสังเคราะห์ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ โดยให้เมทริกซ์ปรับอัตราส่วนคงที่ จากสมการที่ 10 สามารถลดรูปได้เป็น $\min_K \|DND^{-1}\|_\infty$ ขั้นตอนที่สอง

หาเมทริกซ์ปรับอัตราส่วนโดยให้ตัวควบคุมคงที่ จากสมการที่ 10 สามารถลดรูปได้เป็น $\min_D \|DND^{-1}\|_\infty$ เมื่อได้เมทริกซ์ปรับอัตราส่วนแล้ว ให้กลับไปขั้นตอนแรกใหม่ เพื่อสังเคราะห์ตัวควบคุมอีกรอบ โดยในการวนรอบจะหยุดเมื่อ $\|DND^{-1}\|_\infty < 1$ หรือจนกระทั่งค่ามิว (μ) ไม่มีการเปลี่ยนแปลง หรือตามที่เรากำหนดจำนวนการวนรอบในโปรแกรม โดยใช้คำสั่ง "dkit" ในโปรแกรม MATLAB ซึ่งรายละเอียดสามารถศึกษาได้จาก [2,3]

5. การวิเคราะห์ความคงทน (Robust Analysis)

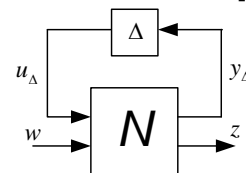
การวิเคราะห์ความคงทนของระบบ เราจะทำการวิเคราะห์ด้วยกันสาม กรณีคือ สมรรถนะที่ระบุ (Nominal Performance, NP), เสถียรภาพคงทน (Robust Stability, RS) และ สมรรถนะคงทน (Robust Performance, RP)

5.1 การวิเคราะห์เสถียรภาพคงทน

การวิเคราะห์เสถียรภาพ ของระบบ ทำได้โดยใช้การแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นล่าง (Lower linear fractional transformation) เพื่อเชื่อมตัวควบคุมกับระบบเข้าด้วยกัน มีสัญลักษณ์คือ $F_l(P, K)$ จะได้

$$N = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \end{bmatrix} K (I - P_{33} K)^{-1} \begin{bmatrix} P_{31} & P_{32} \end{bmatrix} \quad (12)$$

โครงสร้างของการวิเคราะห์ แสดงในรูปที่ 9



รูปที่ 9 โครงสร้างของการวิเคราะห์เสถียรภาพ จากสมการที่ 12 จะได้เมทริกซ์ถ่ายโอนเป็น

$$N = \begin{bmatrix} W_I T & W_I K S \\ W_p S G & W_p S \end{bmatrix} \quad (13)$$

โดยที่ $S = (I + GK)^{-1}$

$$T = GK(I + GK)^{-1}$$

โดยที่ S คือฟังก์ชันความไว (Sensitive function) และ T คือฟังก์ชันความไวเติมเต็ม (Complementary sensitive function) ระบบที่มีเสถียรภาพคงทนจะต้องมีเงื่อนไขดังนี้

$$RS \Rightarrow \mu_{\Delta}(N_{11}) < 1 \quad (14)$$

ในที่นี้ $N_{11} = M$

โดยที่ μ มีนิยาม (Definition) ดังนี้

$$\mu_{\Delta}(M) = \frac{1}{\min\{k_m | \det(I - k_m M \Delta) = 0, \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}} \quad (15)$$

จากสมการที่ 14 หมายถึงการหาค่า k_m ที่ทำให้ดีเทอร์มิแนนต์ของ $(I - k_m M \Delta)$ เป็นเอกฐาน (Singularity) คือเท่ากับศูนย์ แล้วจะได้ค่า μ คือ $1/k_m$ ซึ่งค่า μ ที่สูงเป็นผลเสียต่อระบบ และในทางตรงกันข้ามค่า μ ที่น้อยเป็นผลดีต่อระบบ

5.2 การวิเคราะห์สมรรถนะคงทน

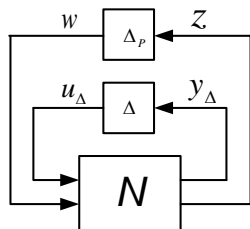
การวิเคราะห์สมรรถนะของระบบ ทำได้โดยการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นบน (Upper linear fractional transformation) มีสัญลักษณ์คือ $F_u(N, \Delta)$ จะได้

$$F = N_{22} + N_{21} \Delta (I - N_{11} \Delta)^{-1} N_{12} \quad (16)$$

จะได้เงื่อนไขของสมรรถนะคงทนเป็น

$$RP = \|F\|_{\infty} < 1, \forall w, \forall \Delta, \|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \quad (17)$$

การพิจารณาสมรรถนะของระบบเราจะเพิ่มความไม่แน่นอนเสมือน Δ_p เข้าไปในระบบเพื่อเชื่อมสัญญาณ z และ w เข้าด้วยกัน ดังแสดงในรูปที่ 10



รูปที่ 10 โครงสร้างของการวิเคราะห์สมรรถนะ และมีเงื่อนไขดังนี้

$$NP \Rightarrow \bar{\sigma}(N_{22}) = \mu_{\Delta_p} < 1 \quad (18)$$

$$RP \Rightarrow \mu_{\tilde{\Delta}}(N) < 1, \tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix} \quad (19)$$

6. ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์

ในบทความนี้เราจะใช้ Robust Control และ μ synthesis toolbox ที่ทำงานบนโปรแกรม MATLAB รายละเอียดสามารถศึกษาได้จาก [2,3] การออกแบบตัวควบคุมทั้งสองตัวที่ได้กล่าวมาข้างต้นนั้น เราได้กำหนดฟังก์ชันน้ำหนักดังนี้

$$W_{i_Theta} = \frac{S+16}{S+20}, W_{i_Phi} = \frac{S+12}{S+20}$$

และ

$$W_{p_Theta} = \frac{S+5}{S^2+150S+1.22}, W_{p_Phi} = \frac{S+5}{S^2+150S+0.62}$$

โดยที่

$$W_i = \begin{bmatrix} W_{i_Theta} & 0 \\ 0 & W_{i_Phi} \end{bmatrix} \text{ และ } W_p = \begin{bmatrix} W_{p_Theta} & 0 \\ 0 & W_{p_Phi} \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันน้ำหนักที่กล่าวมาข้างต้นสามารถจัดให้อยู่ในรูปตามสมการที่ 4 ได้โดยใช้คำสั่ง “sysic” ในโปรแกรม MATLAB

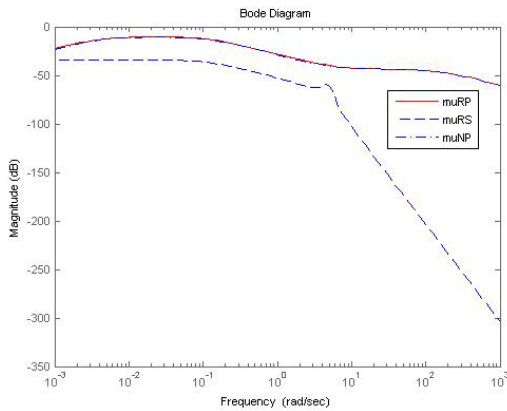
โดยฟังก์ชันน้ำหนักข้างบนนั้นได้มาจากการทดลองเพราะ ยังไม่มีทฤษฎีที่แน่นอนในการเลือก มีแต่แนวทางในการเลือกเท่านั้น แนวทางในการเลือกฟังก์ชันน้ำหนักสามารถศึกษาได้จาก [6,7] ในการเลือกฟังก์ชันน้ำหนักเราจะให้เป็นเมทริกซ์ไดอะกอนัล (Diagonal Matrix) เพราะไม่ต้องการให้ฟังก์ชันน้ำหนักแต่ละช่องไปมีผลกระทบต่อสัญญาณช่องอื่น โดย W_i คือความไม่แน่นอนเชิงพลวัตของระบบ ซึ่งมีผลต่อสัญญาณควบคุม ดังนั้นจึงเลือก W_i มีอันดับ (Order) คือหนึ่งเพราะต้องการให้สัญญาณควบคุมมีการตอบสนองต่อระบบที่เร็ว ส่วน W_p เป็นการกำหนดสมรรถนะของสัญญาณออก มีอันดับคือสอง เพราะต้องการให้ระบบมีผลตอบสนองเชิงเวลาตามที่เราต้องการ เช่น ช่วงเวลาขึ้น (Rise time) และ ส่วนพุ่งเกิน (Overshoot) เป็นต้น

จากผลการคำนวณจากอัลกอริทึมที่ได้กล่าวมาข้างต้นในหัวข้อ 4.1 และ 4.2 โดย ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้มีอันดับ คือ 16, ค่า $\gamma = 0.2068$ และค่า $k_m = 133.29$ ซึ่งความไม่แน่นอนสามารถเพิ่มได้อีก 133.29 ก่อนที่ระบบจะไม่มีเสถียรภาพ ส่วนการสังเคราะห์มีจะทำการวนรอบ 5 รอบ โดยมีค่า γ คือ 0.781, 0.098, 0.047, 0.043 และ 0.043 ตามการวนรอบที่ 1 ถึง 5 ตามลำดับ รายละเอียดแสดงที่ตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงการวนรอบดีเค

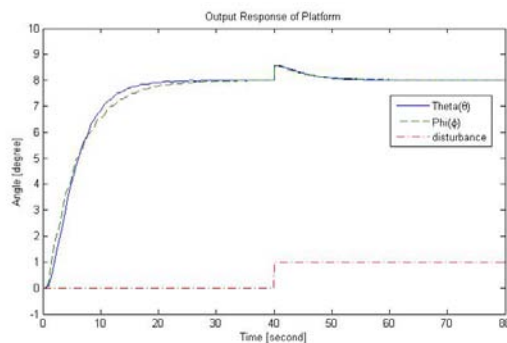
Iteration	1	2	3	4	5
Controller Order (K)	16	20	36	36	36
D-Scale Order(D)	0	4	20	20	20
γ	0.781	0.098	0.047	0.043	0.043
μ	0.292	0.098	0.047	0.043	0.043

6.1 ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะ คงทนของตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้



รูปที่ 11 ค่ามิวของตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้
จากรูปที่ 11 แสดงว่าตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ทำให้
ระบบมีเสถียรภาพและสมรรถนะตามเงื่อนไขกำหนด
ในหัวข้อ 5.1 คือมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง โดยที่ค่ามิวสูงสุด
ของ NP, RS และ RP คือ 0.2018, 0.0075 และ
0.2065 ที่ความถี่ (Frequency) 0.0285, 0.0071 และ
0.0285 เรเดียนต่อวินาที ตามลำดับ

6.2 ผลการจำลองของตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้

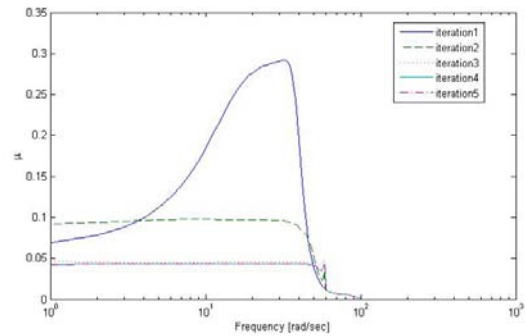


รูปที่ 12 สัญญาณออกที่มีการรบกวน
จากรูปที่ 12 แสดงผลการจำลองการทำงานของระบบ
โดยให้ระบบติดตามสัญญาณอ้างอิงที่มุม $\theta = 8^\circ$ และ
 $\phi = 8^\circ$ และมีสัญญาณรบกวนที่สัญญาณออกของ
ระบบ เป็นแบบขั้นบันได (Step function) เริ่มที่เวลา
40 วินาที ไปจนถึง 80 วินาที

6.3 ผลการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะ คงทนของการสังเคราะห์มิว

การสังเคราะห์มิวนั้น เราจะพิจารณาค่าสูงสุดของ
มิว โดยมีค่าดังนี้ คือ 0.292, 0.098, 0.047, 0.043 และ
0.043 จากการวนรอบที่ 1 ถึง 5 ตามลำดับ ซึ่งแสดง

ในรูปที่ 13 ซึ่งรายละเอียดต่างๆ สามารถดูได้จาก
ตารางที่ 1

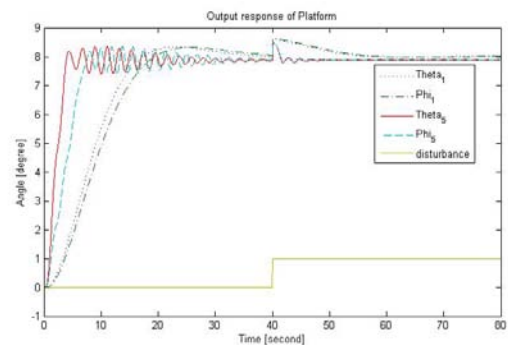


รูปที่ 13 ค่ามิวของการสังเคราะห์มิว

จากรูปที่ 13 แสดงให้เห็นว่าค่ามิวของการวนรอบดีเค
ในรอบที่ 1 ถึง 5 มีค่าน้อยกว่าหนึ่งทั้งหมด ซึ่ง
สอดคล้องกับเงื่อนไขในหัวข้อ 5.1 ทำให้ระบบมี
เสถียรภาพและสมรรถนะ

6.4 ผลการจำลองของการสังเคราะห์มิว

สัญญาณออกของการสังเคราะห์มิวจะแสดงให้เห็น
เฉพาะรอบที่ 1 และ 5 เท่านั้น ดังแสดงในรูปที่ 14



รูปที่ 14 สัญญาณออกของการสังเคราะห์มิว

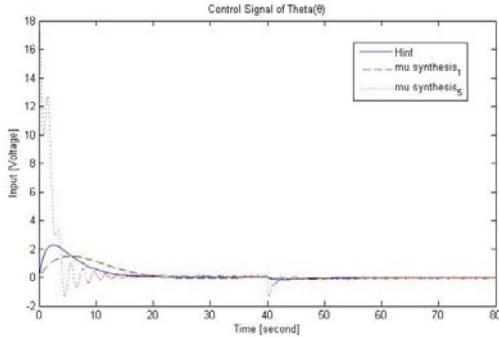
6.5 การวิเคราะห์สัญญาณออก

สัญญาณออกของตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ แสดงใน
รูปที่ 12 มีหนึ่งสัญญาณ ส่วนการสังเคราะห์มิวนั้นจะมี
สัญญาณออกมาได้หลายสัญญาณตามจำนวนการ
วนรอบ ดังแสดงในรูปที่ 14 ถ้าสัญญาณออกไม่ได้
ตามที่ต้องการ ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้จะต้องมีการไป
กำหนดฟังก์ชันน้ำหนักใหม่ แต่ในการสังเคราะห์มิวจะ
ปรับให้อัตโนมัติ ซึ่งการนำไปใช้ผู้ออกแบบจำเป็นต้อง
เลือกให้เหมาะสมกับระบบจริง

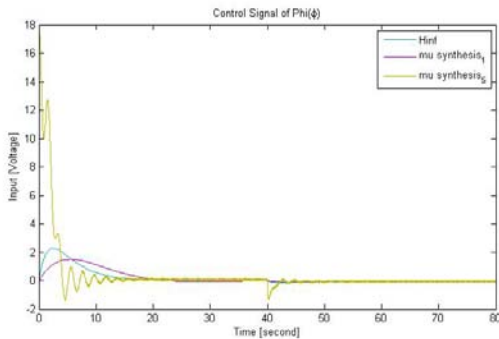
6.6 การวิเคราะห์สัญญาณควบคุม

สัญญาณควบคุมของตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้จะ
ขึ้นอยู่กับค่า NP, RS และ RP ส่วนการสังเคราะห์มิวจะ

ขึ้นอยู่กับค่ามิวของสมการที่ 10 ถ้าค่ามิวมีค่าน้อย สัญญาณการควบคุมก็จะสูง สัญญาณควบคุมทั้งสอง ตัวควบคุมแสดงในรูปที่ 15 และ 16



รูปที่ 15 สัญญาณการควบคุมของมุมลาดเอียง



รูปที่ 16 สัญญาณการควบคุมของมุมโคลง

7. สรุปผล (Conclusion)

ผลจากการจำลองการทำงานของระบบ สามารถแบ่งออกได้ 2 กรณีคือ การออกแบบ ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ และการสังเคราะห์มิว โดยสามารถสรุปได้ดังนี้ ในการควบคุมแบบ เอชอินฟินิตี้ สามารถที่ติดตามมุมอ้างอิงได้ โดยมีเวลาขึ้น ประมาณ 26 วินาที ในการทดสอบสมรรถนะของระบบ เราจะให้สัญญาณรบกวนเป็นแบบขั้นบันได รบกวนที่สัญญาณออกซึ่งระบบก็สามารถติดตามสัญญาณอ้างอิงได้ ดังแสดงในรูปที่ 12 ส่วนการสังเคราะห์มิวนั้น การวนรอบแต่ละครั้งตัวควบคุมที่ได้จะมีอันดับของตัวควบคุมสูงจะขึ้นตามไปด้วยดังแสดงในตารางที่ 1 โดยอันดับของตัวควบคุมที่สูงนั้น จะมีผลทำให้ผลตอบสนองของระบบมีเวลาขึ้นที่น้อย แต่ระบบจะมีส่วนพุ่งเกินมากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 14 สำหรับตัวควบคุมที่มีอันดับสูงๆ ดังเช่นการสังเคราะห์มิวที่รอบที่ 5 ระบบจะมีเวลาขึ้นน้อยมาก และสัญญาณการควบคุมจะสูงมาก ซึ่งอาจจะก่อให้เกิด

ปัญหาเกี่ยวกับตัวขับเคลื่อน (Actuator) เนื่องจากตัวขับเคลื่อนอาจเกิดการอิ่มตัว (Saturated) อาจจะต้องมีการลดอันดับของตัวควบคุม ซึ่งในบทความนี้จะไม่ขอกล่าวถึง เมื่อทำการตรวจสอบตัวควบคุมทั้งสองปรากฏว่าระบบมีเสถียรภาพและสมรรถนะตามที่เงื่อนไขกำหนด สามารถเห็นได้จากรูปที่ 11 และ 13 ในการออกแบบการควบคุมแบบคงทนปัญหาที่พบคือการที่หารูปแบบของความไม่แน่นอนและการเลือกฟังก์ชันน้ำหนัก ซึ่งต้องมีการกำหนดและทดลองจากผู้ออกแบบเอง

8. เอกสารอ้างอิง

- [1] พิเชษฐ สืบสายพรหม,2547, *การรักษาเสถียรภาพของระบบโดยใช้การควบคุมผลต่างระดับน้ำ*, วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.
- [2] Balas, G.J., Doyle, J.C., Glover, K., Packard, A.K. And Smith, R. (2005). *The μ -Analysis and product Synthesis Toolbox*, The MathWorks Inc, Natick, MA.
- [3] Balas, G.J., Chiang, R., Glover, K., Packard, A.K. And Safonov, M. (2005). *Robust Control Toolbox*, The MathWorks Inc., Natick, MA.
- [4] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P., and Francis, B. A. (1989). State-space solutions to the standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985.
- [5] M. Lemkin, P. H. Yang, and D. M. Auslander, Using a Hydraulically Balanced Beam as a Case Study in Control Implementation for Control Education, *American Control Conference*, June, 1995.
- [6] S. Skogestad, and L. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. John Willey & Son, 2nd edition, 2005.
- [7] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essential of Robust Control*. Prentice Hall, 1997.