

การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 23
4 – 7 พฤศจิกายน 2552 จังหวัดเชียงใหม่

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโรเตอร์เกร็งโดยตัวแปรเชิงซ้อน
Vibration Analysis of a Rigid Rotor by Complex Variable

อารยะ กลีบทอง, ประสงค์ อิงสุวรรณ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50200

ติดต่อ: โทรศัพท์: (662) 4708309-10, โทรสาร: (662) 8729805,

E-mail: menett2009@dome.eng.cmu.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอทฤษฎีการเคลื่อนที่ของโรเตอร์เกร็งในรูปแบบตัวแปรเชิงซ้อน สำหรับวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโรเตอร์เกร็ง โดยที่จุดศูนย์กลางมวลไม่อยู่ที่กึ่งกลางระหว่างแบร์ริง ถูกรองรับที่ปลายสองข้างด้วยแบร์ริง โดยไม่คิดผลของความหน่วงหนืด แต่พิจารณาผลของ การหน่วงจาก ไจโรสโคปิกด้วย จากหลักการของนิวตัน หาสมการการเคลื่อนที่และรูปร่างการสั่นสะเทือนในรูปแบบตัวแปรเชิงซ้อนที่แสดงทั้งทิศทางและขนาดในระนาบที่ตำแหน่งแบร์ริงรองรับทั้งสองข้างเคลื่อนที่ พบว่าที่ความเร็วการหมุนของโรเตอร์ ใดๆสามารถหาค่าไอเจนและไอเจนเวกเตอร์ ซึ่งสามารถทำนายรูปร่างการสั่นสะเทือนในรูปแบบต่างๆ คือ แบบแกว่งในแบบทิศตาม แบบทิศสวนทาง และแบบผสมกับการหมุนของโรเตอร์ อีกทั้งยังแสดงกราฟระหว่างความเร็วการหมุนของโรเตอร์เกร็งกับค่าไอเจนซึ่งในกราฟสามารถทำนายความเร็ววิกฤตของโรเตอร์ได้

คำหลัก: การสั่นสะเทือน, โรเตอร์เกร็ง, ตัวแปรเชิงซ้อน

Abstract

This paper shows equation of motion of a rigid rotor by complex variable which is therefore very convenient in vibration analysis of rigid body rotor. The center mass of the rotor is offset from the center line between the supported bearings. The damping of oil film bearing is neglected but only the damping of gyroscopic effect is interesting. Using Newton's theory to find dynamic equation and mode shape in complex variable form, the results can show directions and magnitudes in planes of end rotor at bearings. This model, when the operating speeds show eigen-value and eigen-vector of the system, is predict the directional oscillation in forward, backward and mix mode. The running speeds map can be show the operating speeds with eigen-value which can be predicted the critical speed of the system.

Keywords: Vibration, Rigid rotor, Complex variable

1. บทนำ

การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโรเตอร์จะพิจารณาการเคลื่อนที่ที่ระนาบ ซึ่งส่วนของจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพในตัวแปรเชิงซ้อน สามารถใช้

อธิบายตำแหน่งของจุดบนระนาบของการเคลื่อนที่ได้ นอกจากนั้นยังสามารถบอกทิศทางการเคลื่อนที่ได้อีกด้วย โดยมีนักวิจัยหลายๆท่านได้ศึกษาการสั่นสะเทือน ดังเช่น อารยะและเชดศักดิ์ [1], Chen [2],

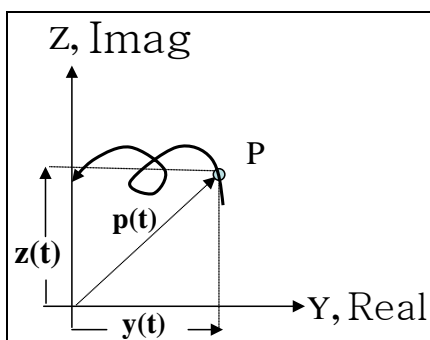
David [3], Kessler [4]-[5], Lee [6]-[7], Milvio [8], Richard [9] ในหลากหลายวิธี สำหรับ Lee และผู้ร่วมวิจัย [6]-[7] ได้เริ่มสนใจใช้ตัวแปรเชิงซ้อนในการศึกษาการสั่นสะเทือนของโรเตอร์ การตอบสนองจากความถี่ และพัฒนาแนวคิดโดยเสนอการตอบสนองความถี่ที่เกี่ยวกับทิศทาง (directional Frequency Response Function (dFRF)) จากนั้น Kessler [4]-[5] ศึกษาการสั่นสะเทือนของโรเตอร์เกียร์ที่มีจุดศูนย์กลางมวลอยู่ตรงกลางโดยใช้ตัวแปรเชิงซ้อนช่วยในการวิเคราะห์ เป็นต้น

จากในหลักการของตัวแปรเชิงซ้อน วิเคราะห์การสั่นสะเทือนของโรเตอร์เกียร์ ที่มีจุดศูนย์กลางมวลไม่อยู่กึ่งกลาง ระหว่างแบร์ริงทั้งสองข้าง ถูกรองรับที่ปลายสองข้างด้วยแบร์ริงไม่คิดผลของความหน่วงหนืด แต่พิจารณาผลของใจโรสโคปิกด้วย ทำให้ได้ผลการเสนอประกอบด้วย สมการการเคลื่อนที่และรูปร่างการสั่นสะเทือนในรูปแบบตัวแปรเชิงซ้อนที่แสดงทั้งทิศทางและขนาดในระนาบที่ตำแหน่งแบร์ริงรองรับทั้งสองข้างเคลื่อนที่

โดยสามารถบอกลักษณะการเคลื่อนที่ในรูปแบบต่างๆได้ เช่น การเคลื่อนที่แบบ แกว่งในแบบทิศตามแบบทิศสวนทาง และแบบผสมกับการหมุนของโรเตอร์ นอกจากนี้ยังแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วของโรเตอร์กับค่าไอเจน ซึ่งสามารถบอกความเร็ววิกฤตที่ความเร็วการหมุนของโรเตอร์ได้

2. สมการการเคลื่อนที่ของโรเตอร์ในรูปแบบตัวแปรเชิงซ้อน

2.1 ตัวแปรเชิงซ้อนอธิบายการเคลื่อนที่ในระนาบ



รูปที่(1) ตัวแปรเชิงซ้อนในระนาบการเคลื่อนที่

ส่วนของจำนวนจริง และจำนวนจินตภาพในตัวแปรเชิงซ้อน สามารถใช้อธิบายตำแหน่งของจุดบนระนาบของการเคลื่อนที่ได้ นอกจากนั้นยังใช้สัญลักษณ์ที่สั้นและกระชับ ซึ่งเป็นข้อดีของเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่สามารถอธิบายลักษณะทางกายภาพได้ โดยบอกทั้งขนาดและทิศทางของการเคลื่อนที่ได้ แสดงดังรูปที่ (1) เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ที่ขึ้นอยู่กับเวลาของจุด P ซึ่งสามารถระบุด้วยตัวแปรเชิงซ้อน $p(t)$ ที่เป็นเวกเตอร์การขจัดในรูปแบบเชิงซ้อน

$$p(t) = y(t) + jz(t) \quad (1)$$

ขณะที่ $j = \sqrt{-1}$ ถ้า $y(t)$ และ $z(t)$ เปลี่ยนรูปแบบโดยใช้เอสโพนเนนเชียลช่วยในการอธิบาย $p(t)$ กลายเป็น

$$p(t) = P_f e^{j\omega t} + P_b e^{-j\omega t} \quad (2)$$

ขณะที่ ω เท่ากับ $2\pi/T$ และ T เป็น คาบของการเคลื่อนที่

พิจารณาค่าจำกัดความของระนาบเชิงซ้อนซึ่ง P_f และ P_b คือ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ ส่วน $e^{j\omega t}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งแสดงลักษณะการหมุน ในทิศทางสวนทางกับเข็มนาฬิกาและในทิศทางเดียวกับความเร็วเชิงมุม ω สำหรับ $e^{-j\omega t}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งแสดงลักษณะการหมุน และในทิศทางตามเข็มนาฬิกาและในทิศทางเดียวกับความเร็วเชิงมุม $-\omega$ ซึ่งในสมการที่ (2) สำหรับการเคลื่อนที่ทั่วไปนั้นจะเป็นสมการของวงรีหรือวงกลม โดยพิจารณาจากขนาดและทิศทางของ P_f และ P_b

2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสมการการเคลื่อนที่สำหรับกรณีทั่วไป

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของโรเตอร์ที่ถูกสร้างขึ้นโดยตัวแปรจริงในรูปแบบสมการเมทริก ดังนี้

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

สมการที่แสดงมีขนาดของเมทริก 4 แถว 4 หลัก เป็นสมการของโรเตอร์เกร็ง เพราะว่าพิจารณาที่สองโหนดและไม่คิดผลของการตัด โดยที่เมทริก $[C]$ ประกอบด้วยผลเนื่องจากตัวหน่วงและใจโรสโคปิก

$$[C] = \left[[C^0] + \Omega [G^0] \right] \quad (4)$$

ขณะที่ $[C^0]$ เป็นผลจากตัวหน่วงเนื่องจากสารหล่อลื่นในแบร์ริง ส่วน $[G^0]$ เป็นผลจากตัวหน่วงเนื่องจากใจโรสโคปิก

สมการรูปแบบตัวแปรจริงสามารถเปลี่ยนเป็นตัวแปรเชิงซ้อนจากเมทริกเปลี่ยนรูป $[T]$ ดังต่อไปนี้

$$[T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [I] & [I] \\ -j[I] & j[I] \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} p \\ \bar{p} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

สำหรับบทความนี้จะใช้สัญญาลักษณ์บาร์บนตัวแปรแสดงถึงคอนจูเกตของตัวแปรเชิงซ้อน (Complex conjugate) ขณะที่ $[I]$ ในสมการที่ (5) เป็นเมทริกหนึ่งหน่วย โดยการใช้ สมการที่ (6) แทนใน สมการที่ (3) และคูณด้วย $[T]^{-1}$ ตลอด จึงได้สมการ

$$[M_C] \begin{Bmatrix} \ddot{p} \\ \ddot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + [C_C] \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + [K_C] \begin{Bmatrix} p \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g \\ \bar{g} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{ขณะที่ } [M_C] = [T]^{-1} [M] [T],$$

$$[C_C] = [T]^{-1} [C] [T],$$

$$[K_C] = [T]^{-1} [K] [T] \text{ และ}$$

$$\begin{Bmatrix} g \\ \bar{g} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} f_y + j f_z \\ f_y - j f_z \end{Bmatrix}$$

สมการที่ (7) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของโรเตอร์ในรูปแบบตัวแปรเชิงซ้อน นำเสนอโดย Lee [6]-[7] สามารถระบุทิศทางของแรงและทิศทางของการเคลื่อนที่ได้ โดยทั่วไปแล้วทั้งแรงและการตอบสนองจะมีส่วนประกอบทิศการหมุน ในแบบทิศตามเข็มนาฬิกาและแบบทิศสวนทางกับเข็มนาฬิกา ดังสมการต่อไปนี้

$$\{p(t)\} = \{P_f\} e^{j\omega t} + \{P_b\} e^{-j\omega t} \quad (8)$$

$$\{g(t)\} = \{G_f\} e^{j\omega t} + \{G_b\} e^{-j\omega t} \quad (9)$$

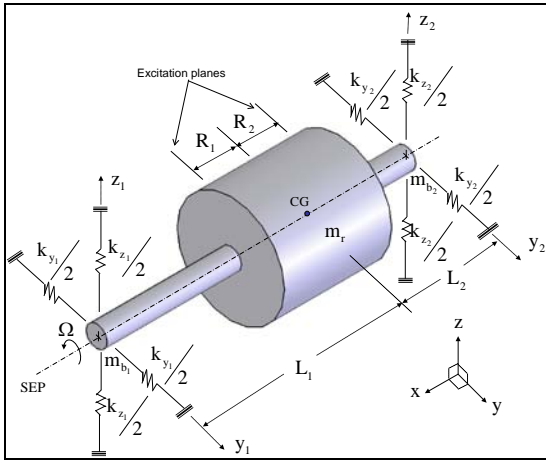
ซึ่งในสมการ (8) เวกเตอร์ $\{P_f\}$ และ $\{P_b\}$ กำหนดให้เป็นส่วนประกอบของการเคลื่อนแบบหมุนในทิศตรงข้ามกัน และในสมการ (9) เวกเตอร์ $\{G_f\}$ และ $\{G_b\}$ กำหนดให้เป็นส่วนประกอบของแรงในทิศตรงข้ามกัน แทนสมการ (8) และ (9) ในสมการ (7) และเลือกพิจารณาเทอม $e^{j\omega t}$ และ $e^{-j\omega t}$ ได้ผลในสองสมการตามลำดับ คือ

$$\left[-\omega^2 [M_C] + j\omega [C_C] + [K_C] \right] \begin{Bmatrix} P_f \\ \bar{P}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_f \\ \bar{G}_b \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\left[-\omega^2 [M_C] + j\omega [C_C] + [K_C] \right] \begin{Bmatrix} \bar{P}_f \\ P_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{G}_f \\ G_b \end{Bmatrix} \quad (11)$$

เนื่องจาก ทั้งสองสมการสามารถ บอกคุณลักษณะของระบบได้เหมือนกันทั้งคู่ จึงเลือกพิจารณาเฉพาะเทอม $e^{j\omega t}$ จากสมการ (10) ซึ่งจะแสดงต่อไป

2.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรเตอร์เกร็งที่จุดศูนย์กลางมวลไม่อยู่กึ่งกลางระหว่างแบร์ริง



รูปที่ (2) โรเตอร์เกร็งที่จุดศูนย์กลางมวลไม่อยู่กึ่งกลางระหว่างแบร์ริง

พิจารณาในรูปที่ (2) ที่แสดงในตำแหน่งสมดุล อิศระ โรเตอร์เกร็งมวลเท่ากับ m_r ถูกรองรับด้วยแบร์ริงที่ตำแหน่งปลายทั้งสองข้างมวลเท่ากับ m_{b1} และ m_{b2} มีความยาวเท่ากับ $L = L_1 + L_2$ ซึ่งจุดศูนย์กลางมวลไม่อยู่กึ่งกลางระหว่างแบร์ริงทั้งสอง โรเตอร์หมุนรอบแกนเพลานในทิศทวนเข็มนาฬิกา เท่ากับ Ω ซึ่งในหลักการของนิวตัน สามารถหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดังสมการ (12)

ขณะที่ m เท่ากับมวลรวมของระบบ, J_T และ J_P คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกน ขวาง กับแกนหมุนและรอบแกนหมุน ตามลำดับ L_1, L_2, R_1 และ R_2 คือ ระยะขจัดจากจุดศูนย์กลางมวลถึงจุดรองรับและจุดแรงกระทำ ที่ตำแหน่งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ k_{y1}, k_{z1}, k_{y2} และ k_{z2} คือ ค่าคงที่ของสปริง ที่ตำแหน่งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ และ f_{y1}, f_{z1}, f_{y2} และ f_{z2} คือ แรงที่กระทำ ที่ตำแหน่งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ซึ่งแรงที่กระทำในระนาบของโรเตอร์โดยส่วนใหญ่จะพิจารณาเนื่องจากแรงที่ไม่สมดุลของโรเตอร์

ซึ่งสมการ (12) เป็นสมการทั่วไปของระบบโรเตอร์เกร็ง ซึ่งพิจารณาผลใจโรสโคปิคแต่ไม่พิจารณาผลของตัวหน่วงเนื่องจากสารหล่อลื่น

$$\begin{bmatrix} m \frac{L_2}{L} & m \frac{L_1}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{J_T}{L^2} & \frac{J_T}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{L_2}{L} & m \frac{L_1}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{J_T}{L^2} & \frac{J_T}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{J_P}{L^2} & \frac{J_P}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{J_P}{L^2} & -\frac{J_P}{L^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{y1} & k_{y2} & 0 & 0 \\ -\frac{L_1}{L}k_{y1} & \frac{L_2}{L}k_{y2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{z1} & k_{z2} \\ 0 & 0 & -\frac{L_1}{L}k_{z1} & \frac{L_2}{L}k_{z2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{y1} + f_{y2} \\ -\frac{R_1}{L}f_{y1} + \frac{R_2}{L}f_{y2} \\ f_{z1} + f_{z2} \\ -\frac{R_1}{L}f_{z1} + \frac{R_2}{L}f_{z2} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

โดยที่ แกน z และ y อธิบายการเคลื่อนที่ที่ตำแหน่งปลายของโรเตอร์ทั้งสองข้าง โดยสามารถเปลี่ยนรูปแบบสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้ในสมการ (13)

$$\text{กำหนด } l_1 = \frac{L_1}{L}, l_2 = \frac{L_2}{L},$$

$$r_1 = \frac{R_1}{L}, r_2 = \frac{R_2}{L},$$

$$i_T = \frac{J_T}{L^2}, i_P = \frac{J_P}{L^2},$$

$$K_1 = \frac{k_{y1} + k_{z1}}{2}, K_2 = \frac{k_{y2} + k_{z2}}{2},$$

$$\Delta K_1 = \frac{k_{y1} - k_{z1}}{2} \text{ และ } \Delta K_2 = \frac{k_{y2} - k_{z2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} ml_2 & ml_1 & 0 & 0 \\ -i_T & i_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ml_2 & ml_1 \\ 0 & 0 & -i_T & i_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} \\
 & + j\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ i_P & -i_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i_P & i_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \Delta K_1 & \Delta K_2 \\ -l_1 K_1 & l_2 K_2 & -l_1 \Delta K_1 & l_2 \Delta K_2 \\ \Delta K_1 & \Delta K_2 & K_1 & K_2 \\ -l_1 \Delta K_1 & l_2 \Delta K_2 & -l_1 K_1 & l_2 K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{Bmatrix} \quad (13) \\
 & = \begin{Bmatrix} f_{y_1} + f_{y_2} + j(f_{z_1} + f_{z_2}) \\ -r_1 f_{y_1} + r_2 f_{y_2} + j(-r_1 f_{z_1} + r_2 f_{z_2}) \\ f_{y_1} + f_{y_2} - j(f_{z_1} + f_{z_2}) \\ -r_1 f_{y_1} + r_2 f_{y_2} - j(-r_1 f_{z_1} + r_2 f_{z_2}) \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

แทนสมการ (8) และ (9) ในสมการ (13) และเลือกพิจารณาเทอม $e^{j\omega t}$ จึงได้สมการ (14) ซึ่งในสมการนี้ มีเทอมของความถี่รวมอยู่ด้วย

$$\text{กำหนด } A = (K_1 - \omega^2 ml_2),$$

$$B = (K_2 - \omega^2 ml_1),$$

$$C = (i_T \omega^2 - \Omega i_P \omega - K_1 l_1),$$

$$D = (-i_T \omega^2 + \Omega i_P \omega + K_2 l_2),$$

$$E = (i_T \omega^2 + \Omega i_P \omega - K_1 l_1) \text{ และ}$$

$$F = (i_T \omega^2 + \Omega i_P \omega - K_1 l_1)$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A & B & \Delta K_1 & \Delta K_2 \\ C & D & -l_1 \Delta K_1 & l_2 \Delta K_2 \\ \Delta K_1 & \Delta K_2 & A & B \\ -l_1 \Delta K_1 & l_2 \Delta K_2 & E & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{f1} \\ P_{f2} \\ \bar{P}_{b1} \\ \bar{P}_{b2} \end{Bmatrix} \\
 & = \begin{Bmatrix} G_{f1} + G_{f2} \\ -r_1 G_{f1} + r_2 G_{f2} \\ \bar{G}_{b1} + \bar{G}_{b2} \\ -r_1 \bar{G}_{b1} + r_2 \bar{G}_{b2} \end{Bmatrix} \quad (14)
 \end{aligned}$$

3. โหมดการเคลื่อนที่ที่เกี่ยวข้องกับทิศทาง

เนื่องจากค่าไอเจน

พิจารณาการสั่นสะเทือนแบบอิสระ จากสมการ (14)

สามารถลดรูปสมการเป็น

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A & B & \Delta K_1 & \Delta K_2 \\ C & D & -l_1 \Delta K_1 & l_2 \Delta K_2 \\ \Delta K_1 & \Delta K_2 & A & B \\ -l_1 \Delta K_1 & l_2 \Delta K_2 & E & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{f1} \\ P_{f2} \\ \bar{P}_{b1} \\ \bar{P}_{b2} \end{Bmatrix} \\
 & = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)
 \end{aligned}$$

ซึ่งสมการ (15) เป็นรูปแบบเมทริก 4 แถว 4 หลัก เมื่อแก้ดีเทอร์มิแนนต์สมการหาค่าความถี่ได้ทั้งหมด 8 ค่า ซึ่งเป็นค่าไอเจนของระบบ ถ้าไม่คิดผลของไจโรสโคปิกจะได้เป็นความถี่ธรรมชาติของระบบ ซึ่งค่าไอเจนแต่ละค่าสามารถหาลักษณะการเคลื่อนที่ของระบบโรเตอร์นั้นได้

เพื่อให้สะดวกต่อการเข้าใจลักษณะการเคลื่อนที่ จึงยกตัวอย่างมาอธิบาย โดยกำหนดให้ m เท่ากับ 8.235 กิโลกรัม, J_T และ J_P เท่ากับ 946.52×10^{-4} และ 45.86×10^{-4} กิโลกรัม·เมตร² L_1 และ L_2 เท่ากับ 0.225 และ 0.195 เมตร $k_{y_1}, k_{z_1}, k_{y_2}$ และ k_{z_2} เท่ากับ 63.721, 70.864, 65.049 และ 74.104 ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาที่ความเร็วโรเตอร์ที่ Ω เท่ากับ 0, 50 และ 100 เฮิร์ตซ์ จากสมการ (15) สามารถหาค่าไอเจนแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าไอเจนที่ความเร็วโรเตอร์ต่างๆ

ความเร็วโรเตอร์ (เฮิร์ตซ์)	ค่าไอเจน (เฮิร์ตซ์)			
	ตัวที่ 1 ($\pm\omega_1$)	ตัวที่ 2 ($\pm\omega_2$)	ตัวที่ 3 ($\pm\omega_3$)	ตัวที่ 4 ($\pm\omega_4$)
0	19.7224	20.9319	33.8248	35.8170
50	19.7221	20.9316	33.2617	36.4243
100	19.7213	20.9308	32.2589	37.5596

ซึ่งค่าไอเจนสามารถหาค่าไอเจนเวกเตอร์ได้
 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 2 ค่าไอเจนเวกเตอร์ที่ความเร็วโรเตอร์ต่างๆ

ไอเจน เวกเตอร์	ไอเจนเวกเตอร์ที่ค่าไอเจนตัวที่			
	ตัวที่ 1 ($\pm\omega_1$)	ตัวที่ 2 ($\pm\omega_2$)	ตัวที่ 3 ($\pm\omega_3$)	ตัวที่ 4 ($\pm\omega_4$)
$\begin{Bmatrix} P_{f1} \\ P_{f2} \\ \bar{P}_{b1} \\ \bar{P}_{b2} \end{Bmatrix}_{\Omega=0}$	$\begin{Bmatrix} 0.80 \\ 1 \\ 0.80 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.80 \\ 1 \\ -0.80 \\ -1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.78 \\ 1 \\ -0.78 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0.79 \\ 1 \\ -0.79 \end{Bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} P_{f1} \\ P_{f2} \\ \bar{P}_{b1} \\ \bar{P}_{b2} \end{Bmatrix}_{\Omega=50}$	$\begin{Bmatrix} 0.79 \\ 1 \\ 0.80 \\ 0.98 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0.84 \\ -0.99 \\ 0.82 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0.37 \\ 0.29 \\ -1 \\ 0.78 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.79 \\ -0.34 \\ 0.27 \end{Bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} P_{f1} \\ P_{f2} \\ \bar{P}_{b1} \\ \bar{P}_{b2} \end{Bmatrix}_{\Omega=100}$	$\begin{Bmatrix} 0.79 \\ 0.97 \\ 0.78 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0.84 \\ -0.99 \\ 0.80 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -0.21 \\ 0.16 \\ -1 \\ 0.77 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0.80 \\ 0.18 \\ -0.15 \end{Bmatrix}$

เมื่อพิจารณาไม่มีความเร็วโรเตอร์ ($\Omega=0$) แทนค่าไอ
 เจนเวกเตอร์และค่าไอเจน(เรเดียน) ซึ่งเป็นความถี่
 ธรรมชาติของระบบ ในสมการ (8)

สำหรับ $+\omega_1$ ได้

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{11}(t) = 0.8e^{j\omega_1 t} + 0.8e^{-j\omega_1 t} \\ \mathbf{p}_{12}(t) = e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t} \end{cases} \quad (16)$$

สำหรับ $+\omega_2$ ได้

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{21}(t) = 0.8e^{j\omega_2 t} - 0.8e^{-j\omega_2 t} \\ \mathbf{p}_{22}(t) = e^{j\omega_2 t} - e^{-j\omega_2 t} \end{cases} \quad (17)$$

สำหรับ $+\omega_3$ ได้

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{31}(t) = e^{j\omega_3 t} + e^{-j\omega_3 t} \\ \mathbf{p}_{32}(t) = -0.78e^{j\omega_3 t} - 0.78e^{-j\omega_3 t} \end{cases} \quad (18)$$

สำหรับ $+\omega_4$ ได้

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{41}(t) = -e^{j\omega_4 t} + e^{-j\omega_4 t} \\ \mathbf{p}_{42}(t) = 0.79e^{j\omega_4 t} - 0.79e^{-j\omega_4 t} \end{cases} \quad (19)$$

สมการ (16) และ (17) สามารถที่จะบอกลักษณะโหมด
 การเคลื่อนที่เนื่องจากความถี่ธรรมชาติ แบบย้าย
 ตำแหน่งในแนว แกน y และ z ตามลำดับ ส่วนสมการ
 (18) และ (19) สามารถที่จะบอกลักษณะโหมดการ
 เคลื่อนที่เนื่องจากความถี่ธรรมชาติ แบบแกว่งใน
 แนวแกน y และ z ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาโรเตอร์หมุนที่ความเร็วโรเตอร์
 เท่ากับ 100 เฮิร์ตซ์ สามารถที่จะบอกลักษณะโหมด
 การเคลื่อนที่เนื่องจากค่าไอเจนได้ดังต่อไปนี้
 สำหรับ $+\omega_1$ ได้

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{11}(t) = 0.79e^{j\omega_1 t} + 0.78e^{-j\omega_1 t} \\ \mathbf{p}_{12}(t) = 0.97e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t} \end{cases} \quad (20)$$

สำหรับ $+\omega_2$ ได้

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{21}(t) = -0.84e^{j\omega_2 t} + 0.8e^{-j\omega_2 t} \\ \mathbf{p}_{22}(t) = -0.99e^{j\omega_2 t} + e^{-j\omega_2 t} \end{cases} \quad (21)$$

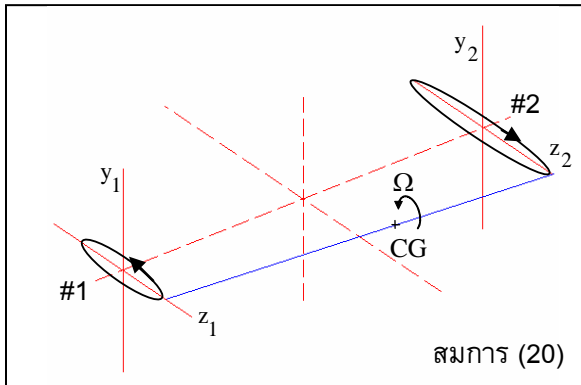
สำหรับ $+\omega_3$ ได้

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{31}(t) = -0.21e^{j\omega_3 t} - e^{-j\omega_3 t} \\ \mathbf{p}_{32}(t) = 0.16e^{j\omega_3 t} + 0.77e^{-j\omega_3 t} \end{cases} \quad (22)$$

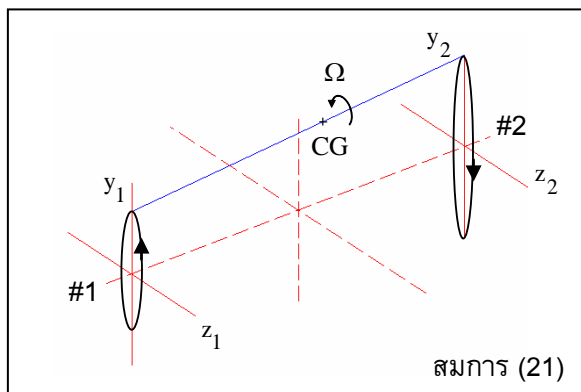
สำหรับ $+\omega_4$ ได้

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{41}(t) = -e^{j\omega_4 t} + 0.18e^{-j\omega_4 t} \\ \mathbf{p}_{42}(t) = 0.80e^{j\omega_4 t} - 0.15e^{-j\omega_4 t} \end{cases} \quad (23)$$

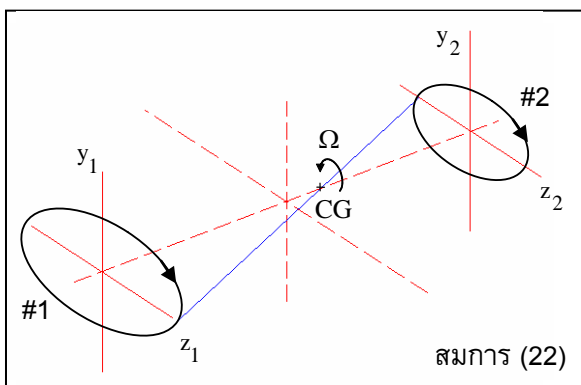
สมการ (20) และ (21) แสดงลักษณะการแกว่งแบบผสมกับการหมุนของโรเตอร์ สมการ (22) แสดงลักษณะการแกว่งแบบทิศสวนทางกับการหมุนของโรเตอร์ และ สมการ (23) แสดงลักษณะการแกว่งแบบทิศตามกับการหมุนของโรเตอร์ ซึ่งจะแสดงในรูปดังต่อไปนี้



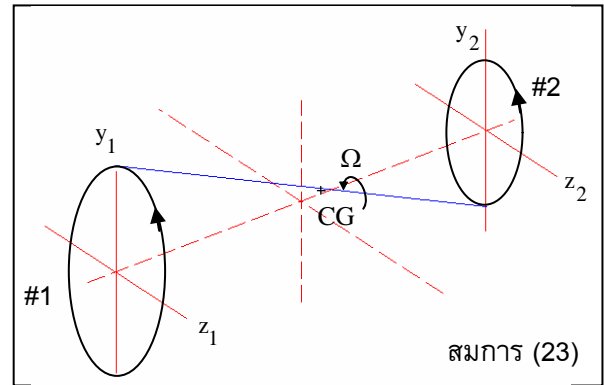
รูปที่ (3) การแกว่งแบบผสมกับการหมุนของโรเตอร์



รูปที่ (4) การแกว่งแบบผสมกับการหมุนของโรเตอร์



รูปที่ (5) การแกว่งแบบทิศสวนทางกับการหมุนของโรเตอร์

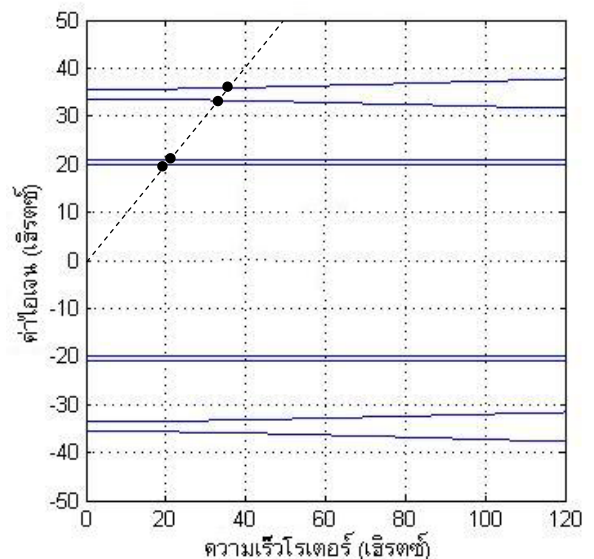


รูปที่ (6) การแกว่งแบบทิศตามกับการหมุนของโรเตอร์

ซึ่งถ้าพิจารณาค่าไอเจนที่ติดลบจะทำให้ลักษณะการแกว่งตรงกันข้ามกับทิศทางที่แสดงดังรูปที่ผ่านมา

เมื่อทำการเปลี่ยนความเร็วของโรเตอร์สามารถที่จะหาความสัมพันธ์ของความเร็วโรเตอร์กับค่าไอเจนดังแสดงในรูปที่ (7)

ซึ่งเมื่อเขียนเส้นความชันเท่ากับหนึ่งจะตัดกับเส้นกราฟทั้งสองจุด ซึ่งเป็นจุดที่ความเร็วเท่ากับค่าไอเจนพอดี เมื่อปรับความเร็วของโรเตอร์เท่ากับค่านี้จะทำให้เกิดการสั่นอย่างรุนแรง เรียกความเร็วนี้ว่า ความเร็ววิกฤตของโรเตอร์



รูปที่ (7) ความสัมพันธ์ของความเร็วโรเตอร์กับค่าไอเจน

4.สรุป

ผลจากการใช้ตัวแปรเชิงซ้อนมาอธิบายการเคลื่อนที่ในระนาบ นอกจากมีความสัมพันธ์กับทางกายภาพแล้วยังสามารถนำมาใช้เป็นหลักการในการวิเคราะห์การสั่นของโรเตอร์ ดังเช่น การสั่นแบบอิสระซึ่งสามารถหาค่าไอเจนและยังสามารถทำนายลักษณะการแกว่งของระบบโรเตอร์ได้(แบบผสม , แบบทิศสวนทางและแบบทิศตามกับการหมุนของโรเตอร์) อีกทั้งยังสามารถหาความเร็ววิกฤตจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วโรเตอร์กับค่าไอเจน

5.เอกสารอ้างอิง

- [1] อารยะ กลีบทอง และเชิดศักดิ์ กันทาเดช . “การสั่นสะเทือนของโรเตอร์ไกริ่งบนแบร์ริงอ่อนตัว .”, วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตร์บัณฑิต มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2549.
- [2] Chen, Y. (1966). *Vibration: Theoretical Method*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company
- [3] David G., 2006, “A Resonant Synchronous Vibration Bases Approach for Rotor Imbalance Detection,” U.S. Army Research Laboratory, Glen Research Center, Cleveland, Ohio

- [4] Kessler, C., and Kim, J, 1999, “Complex Modal Analysis and modal Super-position for Rotating Machinery,” *Proceedings of the 17th International Model Analysis Conference*, pp. 1930-1937
- [5] Kessler, C., and Kim, J, 2002, “Vibration Analysis of Rotors Utilizing Implicit Directional Information of Complex Variable Descriptions,” *ASME J. Vibr. Acoust.*, **124**,July, pp. 340-349
- [6] Lee, C. W., 1993, *Vibration: Analysis of Rotors*, Kluwer Academic Publishers.
- [7] Lee, C. W., 1991, “A Complex modal Testing Theory for Rotating Machinery,” *Mech. Syst. Signal Process.*, 5(2), pp. 119-137
- [8] Milvio C., 1968, “Vibrations of Rotors: The Effect of Lubricant,” Centro Studi Calcolatici Elettroniche del C.N.R. presso l'Universita di Pisa
- [9] Richard H. 1969, “Critical Speed Analysis of Rigid Rotors on Flexible Foundations,” U.S. Army Research Laboratory, Glen Research Center, Cleveland, Ohio