

ความถี่ธรรมชาติของคานสม่ำเสมอที่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง Natural Frequencies of a Spring-Supported Uniform Beam with Point Masses

ศราวุธ อมรตารา^{1*} และ อภิวัฒน์ พลชัย¹

¹ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50200

* ติดต่อ: โทรศัพท์: (086) 6581891

E-mail: por_sarawoot@hotmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เกี่ยวกับการศึกษาผลของมวลจุดต่อความถี่ธรรมชาติของคานสม่ำเสมอรองรับด้วยสปริง โดยมุ่งเน้นที่การเปลี่ยนความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานไปจากเดิม 5 เปอร์เซ็นต์ ด้วยมวลจุด 1 ก้อน แบบจำลองคานเป็นไปตามทฤษฎีของออยเลอร์-แบร์นูลลี และสมการการเคลื่อนที่สำหรับกรณีที่มีมวลจุดและไม่มีมวลจุดใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ตรวจสอบความถูกต้องของผลเชิงทฤษฎีด้วยการทดลองโดยทดลองกับคานภาคตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า สัดส่วนมวลจุดต่อมวลคานที่ใช้ในการวิจัยมีขนาดอยู่ในช่วง 0.050 ถึง 0.575 จากผลการวิจัยพบว่า ถ้าแบบจำลองคิดมวลของระบบที่สั้นทั้งหมด เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนของความถี่ธรรมชาติตัวที่ 1 ถึง 3 ที่ได้จากทฤษฎีเทียบกับที่ได้จากการทดลองสำหรับระบบคานที่ไม่มีมวลจุดและมีมวลจุดไม่เกิน 0.8 และ 2.0 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ ปัจจัยที่ทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนไปจากเดิม 5 เปอร์เซ็นต์ คือ ขนาดและตำแหน่งของมวลจุดโดยการติดตั้งมวลจุด ณ ตำแหน่งใกล้กับสปริงรองรับที่มีค่าน้อยใช้ขนาดมวลจุดน้อยที่สุด

คำหลัก: ความถี่ธรรมชาติ, คานและมวลจุด, คานรองรับด้วยสปริง

Abstract

This research aims at studying point-mass effect on natural frequencies of a spring-supported uniform beam for changing fundamental frequency of the beam by 5 % with 1 point-mass. The equations of motion for beams with and without point-mass are derived by applying Newton's law with the model based on Euler-Bernoulli beam theory. The experiment is setup to examine accuracy of the theory. The beam made of steel with rectangular section and ratio of point-mass to beam-mass in the range of 0.050 to 0.575 is used in the experiment. The conclusion is that the calculated natural frequencies for the first three modes, by using the model including all moving masses, are close to the results from the experiment with the error not more than 0.8 % and 2.0 % for the beam systems with and without point-masses respectively. The factors affecting the first natural frequency to change by 5 % are magnitude and position of the point-mass. For this case the point-mass attached close to spring-support with less spring stiffness has the least magnitude.

Keywords: Natural Frequencies, Beam with Point Masses, Spring-Supported Uniform Beam

1. บทนำ

การทำงานของเครื่องจักรมักเกิดการสั่น หากความถี่ของตัวกระตุ้นการสั่นตรงกับความถี่ธรรมชาติของระบบ จะเกิดการสั่นอย่างรุนแรง (Resonance) ซึ่งทำให้เกิดการเสียหายได้ [1]

เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่า ความถี่ธรรมชาติของระบบเกี่ยวข้องกับความเป็นสปริงและมวลของระบบ การเปลี่ยนความถี่ธรรมชาติของระบบเพื่อหลีกเลี่ยงการสั่นอย่างรุนแรงดังกล่าวกระทำได้ 2 วิธี คือ การเปลี่ยนความเป็นสปริงหรือการเปลี่ยนมวลของระบบ จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่า ได้เน้นไปที่การเปลี่ยนความเป็นสปริงของระบบ แต่การเปลี่ยนมวลของระบบยังมีการศึกษาน้อยอยู่

งานวิจัยนี้ได้เน้นการศึกษาไปที่การเปลี่ยนมวลของระบบด้วยการติดตั้งมวลจุด เพื่อศึกษาว่า มวลจุดส่งผลต่อความถี่ธรรมชาติของระบบอย่างไร โดยศึกษากับคานเนื่องจากเป็นชิ้นส่วนอย่างง่ายที่มีการใช้งานกันอย่างแพร่หลายในงานวิศวกรรมและมักนำไปใช้ในบริเวณที่มีการสั่น ตัวอย่างเช่น คานที่ใช้เป็นฐานในการติดตั้งมอเตอร์, [2] คานที่ใช้เป็นฐานในการติดตั้งเครื่องจักร เป็นต้น ในที่นี้ได้ศึกษาเฉพาะกรณีของคานสมำเสมอรองรับด้วยสปริงเพื่อเป็นตัวอย่างโดยมีทั้งในส่วนของทฤษฎีและการทดลอง ในการทดลองได้ศึกษากับระบบคานข้างต้นจำนวนหนึ่งชุดเพื่อนำผลที่ได้ไปตรวจสอบกับผลการคำนวณตามทฤษฎี

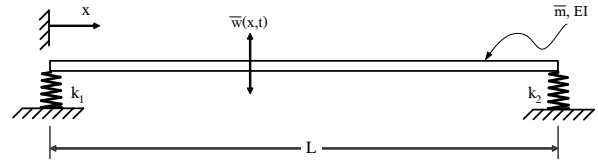
2. ทฤษฎี

ในหัวข้อนี้ได้นำเสนอทฤษฎีการสั่นอิสระของคานรองรับด้วยสปริงในกรณีที่มีมวลจุดและไม่มีมวลจุด รายละเอียดมีดังนี้

2.1 ทฤษฎีการสั่นอิสระของคานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง

คานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริงที่พิจารณาแสดงดังรูปที่ 1 โดย E คือ มอดูลัสของยัง (Young's modulus) I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดของคานที่คิครอบแกนสะเทิน \bar{m} คือ มวลคานต่อหนึ่ง

หน่วยความยาว L คือ ความยาวคาน k_1 และ k_2 คือ ค่า নিজของสปริงรองรับทางด้านซ้ายและขวา ตามลำดับ สมมติให้สปริงรองรับไร้มวล



รูปที่ 1 คานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง

สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ในแนวตั้งของคานที่ไม่มีมวลจุดโดยแบบจำลองคานเป็นไปตามทฤษฎีคานของออยเลอร์-แบร์นูลลี ได้ดังนี้, [1]

$$EI \frac{\partial^4 \bar{w}(x, t)}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 \bar{w}(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

โดยที่ $\bar{w}(x, t)$ คือ การกระจัดตามขวางของคานที่ไม่มีมวลจุด ณ ตำแหน่ง x ที่เวลา t

เงื่อนไขที่ขอบของคานคือ

ที่ $x = 0$

$$EI \frac{\partial^2 \bar{w}(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

$$EI \frac{\partial^3 \bar{w}(0, t)}{\partial x^3} = -k_1 \bar{w}(0, t) \quad (3)$$

ที่ $x = L$

$$EI \frac{\partial^2 \bar{w}(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

$$EI \frac{\partial^3 \bar{w}(L, t)}{\partial x^3} = k_2 \bar{w}(L, t) \quad (5)$$

สมการ (1) ถึง (5) ปรับอยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติ จากนั้นวิเคราะห์เชิงทฤษฎีโดยวิธีทางคณิตศาสตร์ปกติจะได้

$$\square_r = \square_r^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} ; r = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6)$$

$$\square^6 (1 - \cos(\square) \cosh(\square)) + (q_1 + q_2) \square^3 (\cos(\square) \sinh(\square) - \sin(\square) \cosh(\square)) + 2q_1 q_2 \sin(\square) \sinh(\square) = 0 \quad (7)$$

$$\bar{W}_r(z) = A \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cosh(\square_r) - \cos(\square_r)}{\sin(\square_r) - \sinh(\square_r)} \\ \left(\frac{2q_1}{\square_r^3} \right) \sinh(\square_r) \\ \frac{\cosh(\square_r) - \cos(\square_r)}{\sin(\square_r) - \sinh(\square_r)} \\ \sin(\square_r z) \end{array} \right.$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cosh(\square_r) - \cos(\square_r)}{\sin(\square_r) - \sinh(\square_r)} \\ \left(\frac{2q_1}{\square_r^3} \right) \sinh(\square_r) \\ \frac{\cosh(\square_r) - \cos(\square_r)}{\sin(\square_r) - \sinh(\square_r)} \\ \sin(\square_r z) \end{array} \right. \sinh(\square_r z) \left. \right\}$$

$$+ \cos(\square_r z) + \cosh(\square_r z) \quad ; r = 1, 2, 3, \dots, n \quad (8)$$

โดยที่ \square_r คือ ความถี่ธรรมชาติตัวที่ r ของระบบคานที่ไม่มีมวลจุด และ $\bar{W}_r(z)$ คือ รูปร่างฐานนิยม (Mode shape) ที่ r ของคานที่ไม่มีมวลจุดในรูปตัวแปรไร้มิติ

$$\square^4 = \left(\frac{\bar{m}L^4}{EI} \right) \square^2 \quad (9)$$

$$q_1 = \frac{k_1 L^3}{EI} \quad (10)$$

$$q_2 = \frac{k_2 L^3}{EI} \quad (11)$$

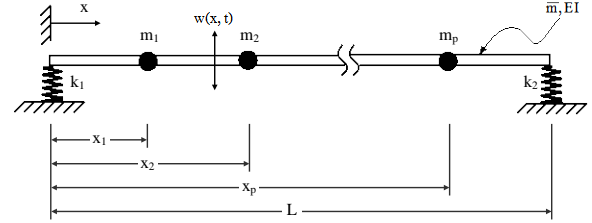
กำหนดให้ $\bar{W}_r(z)$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติ, [3]

$$\int_0^1 \bar{W}_r(z) \bar{W}_s(z) dz = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s \end{cases} \quad (12)$$

เรียกว่า สมบัติเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันปกติ (Orthogonality of normal functions) และใช้สมบัตินี้หาตัวคงที่ A ในสมการ (8) สมการ (6) และ (7) ใช้คำนวณหาความถี่ธรรมชาติของคานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง สมการ (8) ใช้คำนวณหารูปร่างฐานนิยมของคานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง

2.2 ทฤษฎีการสั่นอิสระของคานที่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง

คานที่มีมวลจุดจำนวน p ก้อนและรองรับด้วยสปริงที่พิจารณา แสดงดังรูปที่ตามมา



รูปที่ 2 คานที่มีมวลจุดจำนวน p ก้อนและรองรับด้วยสปริง

สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ในแนวตั้งของคานที่มีมวลจุดจำนวน p ก้อน โดยแบบจำลองคานเป็นไปตามทฤษฎีคานของออยเลอร์-แบร์นูลลี ได้ดังนี้ [4]

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = - \sum_{j=1}^p m_j \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \delta(x-x_j) \quad (13)$$

โดยที่ $w(x,t)$ คือ การกระจัดตามขวางของคานที่มีมวลจุด ณ ตำแหน่ง x ที่เวลา t สำหรับ m_j คือ มวลจุดก้อนที่ j และ $\delta(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันไดเรคเดลต้า (Dirac delta function) สมการ (13) เขียนอยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติ จากนั้นวิเคราะห์เชิงทฤษฎีโดยวิธีการรวมเชิงวิเคราะห์และเชิงตัวเลข (Analytical and numerical combined method) จะได้

$$[\square] - [G] = 0 \quad (14)$$

โดยที่

$$[\square] = \text{diag} \left(\left(\frac{\square_1}{\square} \right)^2, \left(\frac{\square_2}{\square} \right)^2, \left(\frac{\square_3}{\square} \right)^2, \dots, \left(\frac{\square_n}{\square} \right)^2 \right) \quad (15)$$

$$[G] = [I] + [H] \quad (16)$$

สำหรับ

\square คือ ความถี่ธรรมชาติของระบบคานที่มีมวลจุด

$[I] =$ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) (17)

$$[H] = \sum_{j=1}^P M_j \{\bar{W}(z_j)\} \{\bar{W}(z_j)\}^T \quad (18)$$

$$\{\bar{W}(z_j)\} = \{\bar{W}_1(z_j) \quad \bar{W}_2(z_j) \quad \bar{W}_3(z_j) \quad \dots \quad \bar{W}_n(z_j)\} \quad (19)$$

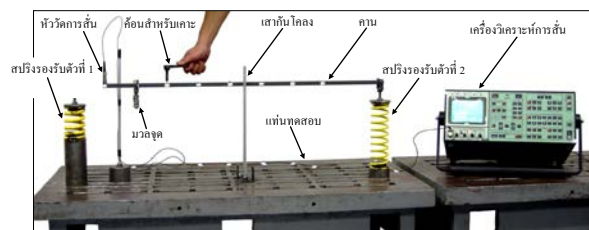
สมการ (14) ใช้คำนวณหาความถี่ธรรมชาติของคานที่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง

3. การทดลอง

การดำเนินงานในส่วนนี้แบ่งออกเป็นห้า ส่วนหลัก รายละเอียดมีดังนี้

3.1 ชุดทดลอง

ชุดทดลองที่ใช้ในการวิจัยแสดงดังรูปที่ตามมานี้ โดยสามารถถอดและประกอบมวลจุดได้สะดวก



รูปที่ 3 ชุดทดลอง

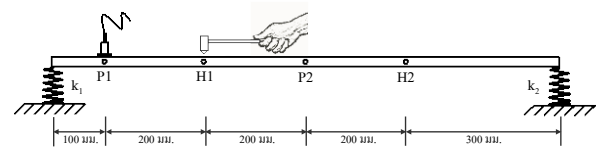
3.2 วัสดุอุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

วัสดุอุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลองประกอบด้วย คาน เหล็กยาว 1 เมตร ขนาดภาคตัด 25×12 มิลลิเมตร จำนวน 1 ชิ้น ซึ่งมีมวลคานเท่ากับ 2.449 กิโลกรัม และ มอดุลัสของยังของวัสดุที่ใช้ทำคานเท่ากับ 210.3 จิกะปาสกาล สปริงรองรับตัวที่ 1 ซึ่งค่านิจเท่ากับ 193.4 นิวตันต่อมิลลิเมตร และมวลเท่ากับ 1.962 กิโลกรัม สปริงรองรับตัวที่ 2 ซึ่งค่านิจเท่ากับ 16.28 นิวตันต่อมิลลิเมตร และมวลเท่ากับ 1.872 กิโลกรัม มวลจุด เสากันโคลง และแท่นทดสอบ

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองประกอบด้วย เครื่องวิเคราะห์การสั่นยี่ห้อ Brüel & Kjaer รุ่น 2515 หัววัดการสั่นยี่ห้อ Brüel & Kjaer รุ่น 4391 ซึ่งมีมวลเท่ากับ 0.036 กิโลกรัม ค้อนสำหรับเคาะ และเครื่องชั่งน้ำหนักความละเอียด 1 กรัม

3.3 วิธีการทดลอง

ในหัวข้อนี้เป็นการนำเสนอวิธีการทดลองหาความถี่ธรรมชาติของชุดทดลองขณะมีมวลจุดและไม่มีมวลจุด การทดลองนี้ใช้วิธีค้อนเคาะ (Impact hammer method) ตำแหน่งติดตั้งหัววัดการสั่นและตำแหน่งเคาะกำหนดดังรูปที่ตามมา



รูปที่ 4 ตำแหน่งหัววัดการสั่นและตำแหน่งเคาะที่ใช้ในการทดลอง

การทดลอง

โดยที่ P1 และ P2 คือ ตำแหน่งหัววัดการสั่น ส่วน H1 และ H2 คือ ตำแหน่งเคาะ ขนาดของแรงเคาะไม่ได้ถูกกำหนดในการทดลองนี้เนื่องจากควบคุมยาก แต่จากการทดลองเบื้องต้นพบว่า แรงเคาะที่ขนาดต่าง ๆ ไม่ส่งผลให้ความถี่ธรรมชาติที่วัดได้แตกต่างกัน ช่วงความถี่ที่ใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณการสั่นของเครื่องวิเคราะห์การสั่นเท่ากับ 0 ถึง 100 เฮิรตซ์ การทดลองหาความถี่ธรรมชาติของระบบคานที่มีมวลจุดและไม่มีมวลจุดมีขั้นตอนเหมือนกัน รายละเอียดมีดังนี้

(1) ติดตั้งหัววัดการสั่น ณ ตำแหน่ง P1

(2) เคาะคานด้วยค้อน ณ ตำแหน่ง H1 เพื่อให้ระบบคานเกิดการสั่นอิสระ จากนั้นวัดความถี่ธรรมชาติของระบบคานด้วยเครื่องวิเคราะห์การสั่น ขั้นตอนนี้ทดลองซ้ำจำนวนสามครั้ง ผลเบื้องต้นที่ได้จากการทดลองได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.5

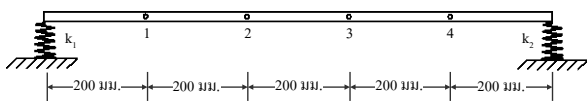
(3) ทดลองตามขั้นตอน (2) ซ้ำอีกครั้งแต่เปลี่ยนตำแหน่งเคาะเป็น H2

(4) เปลี่ยนตำแหน่งหัววัดการสั่นเป็น P2 แล้วทำตามขั้นตอน (2) และ (3) ซ้ำอีกครั้ง

ดังนั้นการทดลองหาความถี่ธรรมชาติของระบบคานหนึ่ง ๆ ต้องทดลองเคาะทั้งหมด 12 ครั้ง ขนาดและตำแหน่งของมวลจุด 1 ก้อนสำหรับการวิจัยเป็นดังหัวข้อที่ตามมานี้

3.4 ขนาดและตำแหน่งของมวลจุด 1 ก่อนสำหรับการวิจัย

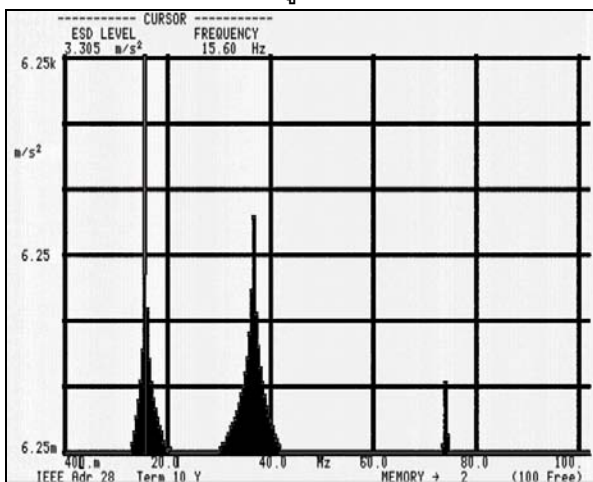
ในหัวข้อนี้เป็นการนำเสนอขนาดและตำแหน่งของมวลจุด 1 ก่อนสำหรับการวิจัย กำหนดให้การติดตั้งมวลจุดดังกล่าวเปลี่ยนความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานไปจากเดิม 5 เฮอร์เซ็นต์ ตำแหน่งติดตั้งมวลจุดกำหนดไว้สี่ตำแหน่งคือ 1, 2, 3 และ 4 แสดงดังรูปที่ตามมา แต่ละตำแหน่งได้สุ่มติดตั้งมวลจุดที่มีขนาดแตกต่างกัน 5 ขนาด ดังนั้นระบบคานที่ใช้ในการวิจัยนี้มีทั้งหมด 20 กรณี



รูปที่ 5 ตำแหน่ง 1 ถึง 4 สำหรับติดตั้งมวลจุดบนคาน

3.5 ผลเบื้องต้นจากการทดลอง

การวัดความถี่ธรรมชาติของระบบคานด้วยเครื่องวิเคราะห์การสั่น ผลเบื้องต้นที่ได้จะแสดงเป็นกราฟโดเมนความถี่ (Frequency domain) ในที่นี้ได้นำกราฟโดเมนความถี่จากการทดลองหาความถี่ธรรมชาติของคานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง ณ ตำแหน่งหัววัดการสั่น P2 และตำแหน่งเคาะคาน H1 มานำเสนอเพื่อเป็นตัวอย่าง แสดงดังรูปที่ตามมา



รูปที่ 6 กราฟโดเมนความถี่จากการทดลองหาความถี่ธรรมชาติของคานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง ณ ตำแหน่งหัววัดการสั่น P2 และตำแหน่งเคาะคาน H1

โดยแกนนอนแสดงความถี่ มีหน่วยเป็นเฮิรตซ์ และแกนตั้งแสดงแอมพลิจูดของการสั่น มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที

4. ผลเชิงทฤษฎี ผลการทดลอง การเปรียบเทียบ และการวิจารณ์

4.1 ผลเชิงทฤษฎี ผลการทดลอง การเปรียบเทียบ และการวิจารณ์เกี่ยวกับความถี่ธรรมชาติของคานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง

ในที่นี้เป็นการนำเสนอผลเชิงทฤษฎีและผลการทดลองเกี่ยวกับความถี่ธรรมชาติของคานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง ในขณะที่คานสั้นระหว่างการทดลอง มวลสปริงรองรับและมวลหัววัดการสั่นจะสั้นด้วย ฉะนั้นมวลดังกล่าวย่อมมีผลต่อความถี่ที่วัดออกมา การคำนวณหาความถี่การสั่นของระบบคานนี้ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีการสั่นตามหัวข้อ 2.2 ในการคิดผลของมวลดังกล่าว รายละเอียดในการคำนวณจะใช้จำนวนพจน์ในการประมาณการกระจัดตามขวางของคานเท่ากับ 6 พจน์ ($n = 6$) ซึ่งได้จากรูปร่างฐานนิยมของระบบคานที่ไม่มีมวลจุดตามสมการ (8) ผลเชิงทฤษฎีที่นำเสนอได้จากการเฉลี่ยผลการคำนวณที่คิดมวลหัววัดการสั่น ณ ตำแหน่ง P1 และ P2 สมบัติทางกายภาพและสมบัติทางกลของชุดทดลองที่ใช้ในการคำนวณเป็นไปตามที่นำเสนอไว้ในหัวข้อ 3.2 ผลการทดลองที่นำเสนอได้จากการเฉลี่ยผลการทดลอง ณ ตำแหน่งหัววัดการสั่น P1 และ P2 ทั้งหมด ผลเชิงทฤษฎีและผลการทดลองดังกล่าวแสดงไว้ในรูปที่ 7

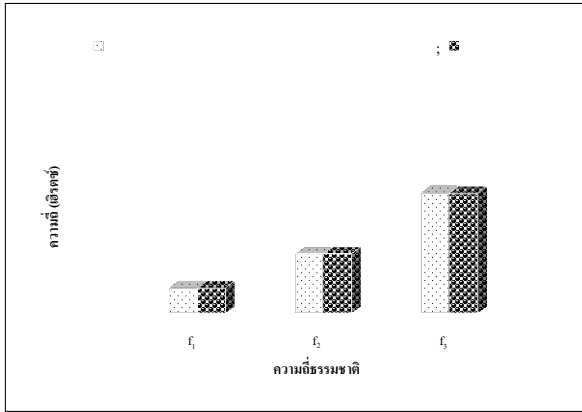
การเปรียบเทียบผลเชิงทฤษฎีกับผลการทดลองสำหรับ ความถี่ธรรมชาติของคานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง ได้แสดงในรูปของเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนระหว่างผลดังกล่าวซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ตามมา

$$\text{เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อน} = \left| \frac{\text{ผลการทดลอง} - \text{ผลเชิงทฤษฎี}}{\text{ผลการทดลอง}} \right| \times 100 \% \quad (20)$$

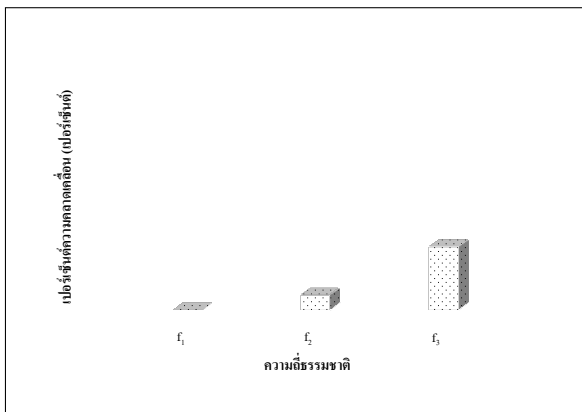
เมื่อคำนวณหาเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนตามสมการที่กล่าวในข้างต้นสำหรับความถี่ธรรมชาติตัวที่ 1, 2 และ 3 แสดงดังรูปที่ 8

จากผลเชิงทฤษฎีและผลการทดลองเกี่ยวกับความถี่ธรรมชาติของคานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริงที่นำเสนอในรูปที่ 7 จะเห็นว่า ผลเชิงทฤษฎีและผลการทดลองใกล้เคียงกันมาก กล่าวคือ เปอร์เซ็นต์

ความคลาดเคลื่อนสำหรับความถี่ธรรมชาติตัวที่ 1, 2 และ 3 เป็น 0.0, 0.2 และ 0.8 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 8 แสดงให้เห็นว่า ผลการคำนวณมีความคลาดเคลื่อนจากการทดลองเพียงเล็กน้อย



รูปที่ 7 ผลเชิงทฤษฎีและผลการทดลองเกี่ยวกับความถี่ธรรมชาติของคานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง



รูปที่ 8 เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสำหรับความถี่ธรรมชาติของคานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง

4.2 ผลเชิงทฤษฎี ผลการทดลอง การเปรียบเทียบ และการวิจารณ์เกี่ยวกับความถี่ธรรมชาติของระบบคานที่มีมวลจุด 1 ก้อนซึ่งทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนไปจากเดิม 5 เปอร์เซ็นต์

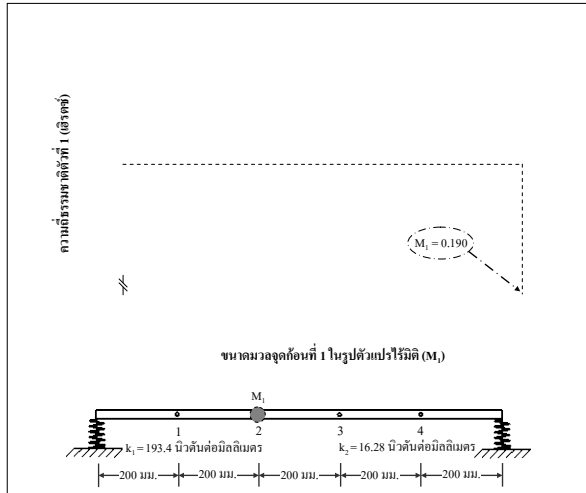
ในที่นี้เป็นการนำเสนอผลเชิงทฤษฎี และผลการทดลองเกี่ยวกับความถี่ธรรมชาติของระบบคานที่มีมวลจุด 1 ก้อนซึ่งทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนไปจากเดิม 5 เปอร์เซ็นต์ ผลเชิงทฤษฎีได้คิดมวลสปริงรองรับและมวลห้วงการสั่นในการคำนวณด้วย ผลเชิงทฤษฎีที่นำเสนอได้จากการวางห้วงการสั่น ณ ตำแหน่ง P1 และ P2 แล้วนำมาเฉลี่ยเพื่อเป็น

ตัวแทนความถี่ธรรมชาติของระบบคานดังกล่าว สมบัติทางกายภาพและสมบัติทางกลของชุดทดลองที่ใช้ในการคำนวณเป็นไปตามที่นำเสนอไว้ในหัวข้อ 3.2 การสุ่มมวลจุดมาติดตั้งบนคาน ณ ตำแหน่งหนึ่ง ๆ เพื่อเปลี่ยนความถี่ธรรมชาติดังกล่าวมีรายละเอียดดังนี้ คำนวณหาความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเมื่อติดตั้งมวลจุดซึ่งมีขนาดที่แตกต่างกันคือ 0.050, 0.100, 0.150 และ 0.200 เท่าของมวลคาน ณ ตำแหน่งข้างต้น ผลการคำนวณทำให้ทราบความสัมพันธ์ระหว่างขนาดมวลจุดกับความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคาน จากความสัมพันธ์นี้ทำให้เลือกช่วงมวลจุดที่ใช้ในการประมาณค่าในช่วง (Interpolate) หรือนอกช่วง (Extrapolate) เพื่อหาขนาดมวลจุดดังกล่าวได้ ในที่นี้ได้ทำการประมาณค่าในช่วงเกี่ยวกับมวลจุดก่อนที่ 1 ในรูปตัวแปรไร้มิติ (M_1) ณ ตำแหน่ง 2 ซึ่งทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนไปจากเดิม 5 เปอร์เซ็นต์ มาแนะนำเสนอเพื่อเป็นตัวอย่าง แสดงดังรูปที่ 9 จากการประมาณค่าในช่วงหรือนอกช่วงดังกล่าว พบว่าความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนจาก 15.8 เป็น 15.0 เฮิรตซ์ เมื่อติดตั้งมวลจุดซึ่งมีขนาด ดังแสดงในรูปที่ 10 ผลเชิงทฤษฎีสำหรับความถี่ธรรมชาติสามตัวแรกของระบบคานดังกล่าวแสดงดังรูปที่ 11 ความถี่ธรรมชาติตัวที่ 1, 2 และ 3 จากการทดลองที่นำเสนอได้จากการเฉลี่ยผลการทดลอง ณ ตำแหน่งห้วงการสั่น P1 และ P2 ทั้งหมด แสดงดังรูปที่ 12

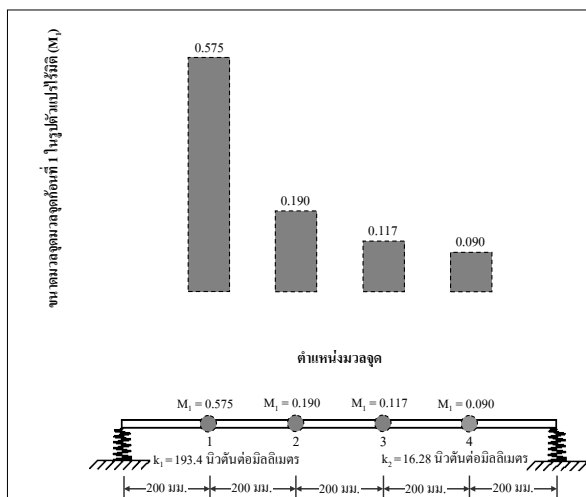
การเปรียบเทียบผลเชิงทฤษฎีและผลการทดลองสำหรับ ความถี่ธรรมชาติของระบบคานที่มีมวลจุด 1 ก้อนซึ่งทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนไปจากเดิม 5 เปอร์เซ็นต์ ได้แสดงไว้ในรูปของเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนระหว่างผลดังกล่าว เมื่อคำนวณเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนตามสมการ (20) ได้ผลดังรูปที่ 13

จากผลเชิงทฤษฎีและผลการทดลองเกี่ยวกับความถี่ธรรมชาติของระบบคานที่มีมวลจุด 1 ก้อนซึ่งทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนไปจากเดิม 5 เปอร์เซ็นต์ ในรูปที่ 11 และ 12 จะเห็นว่า ผลเชิงทฤษฎีและผลการทดลองใกล้เคียงกันมากซึ่งเปอร์เซ็นต์

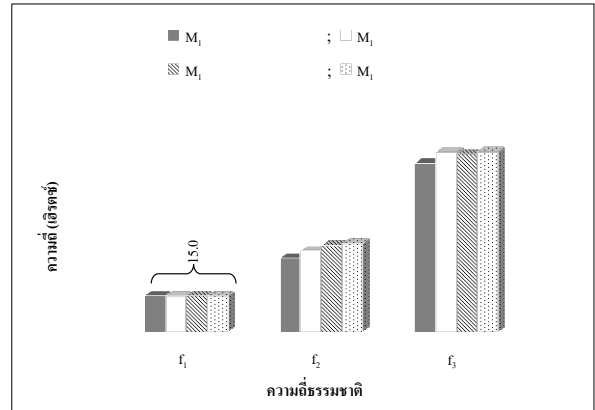
ความคลาดเคลื่อนสูงสุดไม่เกิน 2.0 เปอร์เซ็นต์ ความแตกต่างของความถี่ธรรมชาติที่ได้จากทฤษฎีกับการทดลองนี้อาจจะมีสาเหตุมาจาก ในการทดลอง มวลจุดที่ติดตั้งกับคานไม่เป็นจุดอย่างแท้จริงโดยพื้นที่ติดตั้งมวลจุดเทียบกับพื้นที่ของคานตามแนวแกนเท่ากับ 0.01 จึงทำให้แรงจากขนาดมวลจุดที่กระทำกับคานเป็นแรงกระจาย ซึ่งแตกต่างจากทฤษฎีที่กำหนดให้แรงจาก



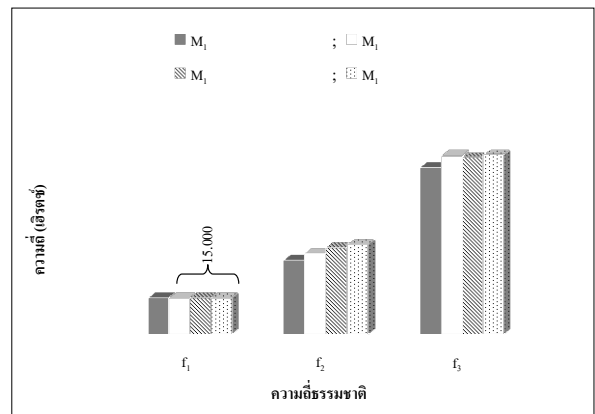
รูปที่ 9 การประมาณค่าในช่วงเกี่ยวกับมวลจุดก้อนที่ 1 ในรูปตัวแปรไร้มิติ (M_1) ณ ตำแหน่ง 2 ซึ่งทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนไปจากเดิม 5 เปอร์เซ็นต์



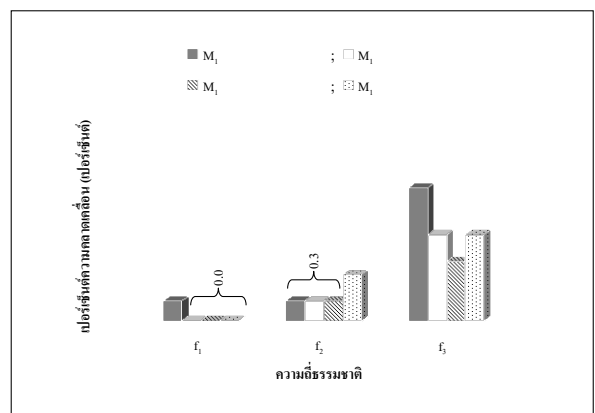
รูปที่ 10 ความสัมพันธ์เชิงทฤษฎีระหว่างขนาดกับตำแหน่งของมวลจุดก้อนที่ 1 ในรูปตัวแปรไร้มิติ (M_1) ซึ่งทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนไปจากเดิม 5 เปอร์เซ็นต์



รูปที่ 11 ผลเชิงทฤษฎีสำหรับความถี่ธรรมชาติของระบบคานที่มีมวลจุดก้อนที่ 1 ในรูปตัวแปรไร้มิติ (M_1) ซึ่งทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนไปจากเดิม 5 เปอร์เซ็นต์



รูปที่ 12 ผลการทดลองสำหรับความถี่ธรรมชาติของระบบคานที่มีมวลจุดก้อนที่ 1 ในรูปตัวแปรไร้มิติ (M_1) ซึ่งทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนไปจากเดิม 5 เปอร์เซ็นต์



รูปที่ 13 เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสำหรับความถี่ธรรมชาติของระบบคานที่มีมวลจุดก้อนที่ 1 ในรูปตัวแปรไร้มิติ (M_1) ซึ่งทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนไปจากเดิม 5 เปอร์เซ็นต์

ขนาดมวลจุดกระทำกับคานเป็นจุด ส่งผลให้ความถี่ธรรมชาติที่ได้จากทฤษฎีและการทดลองมีค่าที่แตกต่างกัน

จากความสัมพันธ์เชิงทฤษฎีระหว่างขนาดกับตำแหน่งของมวลจุดก่อนที่ 1 ในรูปตัวแปรไร้มิติ (M_1) ที่ทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรก ของระบบคานเปลี่ยนไปจากเดิม 5 เฮอร์เซ็นต์ ในรูปที่ 10 พบว่าการติดตั้ง M_1 ณ ตำแหน่ง 1, 2, 3 และ 4 โดยตำแหน่งดังกล่าวเรียงลำดับจากตำแหน่งที่ใกล้กับสปริงรองรับที่มีค่านิจมากไปน้อย ใช้ขนาดมวลจุดเป็น 0.575, 0.190, 0.117 และ 0.090 ตามลำดับ จะเห็นว่า การติดตั้งมวลจุด 1 ก่อน ณ ตำแหน่งที่ใกล้กับสปริงรองรับที่มีค่านิจมากไปน้อย ใช้ขนาดมวลจุดเรียงจากมากไปหาน้อยตามลำดับ จึงมีความเห็นว่า มวลจุดนี้น่าจะมีขนาดน้อยที่สุดเมื่อติดตั้ง ณ ตำแหน่งเดียวกันกับสปริงรองรับที่มีค่านิจน้อย

5. สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีเพื่อหาความถี่ธรรมชาติของคานที่ไม่มีมวลจุดและรองรับด้วยสปริง จากนั้นเปรียบเทียบผลที่ได้กับผลการทดลอง สรุปได้ว่าการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีเพื่อหาความถี่ธรรมชาติของระบบคานซึ่งคิดผลการสั่นของมวลสปริงรองรับทั้งสองข้างและมวลหัววัดการสั่นในการคำนวณ เฮอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนระหว่างผลเชิงทฤษฎีกับผลการทดลองไม่เกิน 0.8 เฮอร์เซ็นต์

การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีเพื่อหาความถี่ธรรมชาติของคานรองรับด้วยสปริงที่ไม่มีมวลจุดเปลี่ยน ความถี่ธรรมชาติตัวแรกไปจากเดิม 5 เฮอร์เซ็นต์ ด้วยมวลจุด 1 ก่อน จากนั้นเปรียบเทียบผลที่ได้กับผลการทดลอง สรุปได้ว่าการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีเพื่อหาความถี่ธรรมชาติของระบบคานดังกล่าวซึ่งคิดผลการสั่นของมวลสปริงรองรับและมวลหัววัดการสั่นในการคำนวณ เฮอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนระหว่างผลเชิงทฤษฎีกับผลการทดลองไม่เกิน 2.0 เฮอร์เซ็นต์

จึงกล่าวสรุปได้ว่า แบบจำลองทางทฤษฎีสำหรับการสั่นในการศึกษานี้มีความแม่นยำดีมาก

การเปลี่ยนความถี่ธรรมชาติตัวแรก ของคานรองรับด้วยสปริงไปจากเดิม 5 เฮอร์เซ็นต์ ด้วยมวลจุด 1 ก่อน ณ ตำแหน่งห่างจากปลายคานด้านซ้ายเป็นระยะ 0.200 , 0.400 , 0.600 และ 0.800 เมตร ตามลำดับ ซึ่งตำแหน่งดังกล่าวเรียงลำดับจากตำแหน่งที่ใกล้กับสปริงรองรับที่มีค่านิจมากไปน้อย มวลจุดดังกล่าวมีขนาดเป็น 0.575, 0.190, 0.117 และ 0.090 เท่าของมวลคาน ตามลำดับ สรุปได้ว่า ปัจจัยที่ทำให้ความถี่ธรรมชาติตัวแรกของระบบคานเปลี่ยนไปดังกล่าวคือ ขนาดและตำแหน่งของมวลจุด การติดตั้งมวลจุด ณ ตำแหน่งที่ใกล้กับสปริงรองรับที่มีค่านิจเรียงจากมากไปน้อยจะใช้ขนาดมวลจุดเรียงจากมากไปน้อยเช่นกัน

5.2 ข้อเสนอแนะ

ควรวิจัยเพิ่มเติมกับระบบคานที่มีจุดรองรับแบบอื่น ๆ เช่น แบบมีตัวหน่วง (Damper) เป็นต้น เพื่อนำข้อสรุปที่ได้ไปประยุกต์ใช้กับงานได้หลากหลายยิ่งขึ้น

น่าจะศึกษาเพิ่มเติมกับชุดทดลองคานรองรับด้วยสปริงอื่น ๆ เช่น คานที่มีภาคตัดวงกลม คานที่มีวัสดุเป็นอลูมิเนียม เป็นต้น เพื่อเป็นการยืนยันว่า ข้อสรุปที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 5.1 เป็นจริงกับกรณีอื่น ๆ หรือไม่

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Rao, S.S. (2005). *Mechanical Vibrations*, Pearson Education South Asia Pte Ltd., Singapore.
- [2] Rossit, C.A. and Laura, P.A.A. (2001). Free vibrations of a cantilever beam with a spring-mass system attached to the free end, *Ocean Engineering*, vol.28(7), pp.933-939.
- [3] Dimarogonas, A.D. and Haddad, S. (1992). *Vibration for Engineer*, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- [4] Wu, J.S. and Lin, T.L. (1990). Free vibration analysis of a uniform cantilever beam with point masses by an analytical-and-numerical-combined method, *Journal of Sound and Vibration*, vol.136(2), pp.201-213.