

## การจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดโดยการเปรียบเทียบระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ในระบบพิกัดฉาก และ ระบบพิกัดเชิงขั้ว

### A Simulation of Tubular-Ice Solidification with Comparing Numerical Method in Cartesian and Polar coordinates

ณัฐดนัย พรรณเจริญวงษ์<sup>1\*</sup>, ฉัตรชัย เบญจปิยะพร<sup>1</sup> และ จุฬภาภรณ์ เบญจปิยะพร<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น จ.ขอนแก่น 40002

\* ติดต่อ: E-mail: tsubasa\_ice1@hotmail.com<sup>1</sup> โทรศัพท์: 084-6013737

#### บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการจำลองสำหรับปัญหาการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดโดยการเปรียบเทียบระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉาก และ ระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยจะพิจารณาช่วงของเวลาที่ใช้ในการแข็งตัวที่เวลา 10, 20 และ 31 นาที ซึ่งเป็นเวลาที่ใช้ในกระบวนการผลิตจริง อุณหภูมิของสารทำความเย็นมีค่าคงที่ เท่ากับ  $-8^{\circ}\text{C}$  และอุณหภูมิน้ำขาเข้ามีค่าเท่ากับ  $35^{\circ}\text{C}$ ,  $30^{\circ}\text{C}$  และ  $25^{\circ}\text{C}$  โดยแบ่งออกเป็น 3 กรณี ซึ่งจากผลการคำนวณพบว่าค่าความหนาของน้ำแข็งจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากจะมีค่าน้อยกว่าระบบพิกัดเชิงขั้วโดยในระบบพิกัดฉากได้ทำการสมมติให้ผนังท่อเป็นเสมือนแผ่นเรียบที่มีความกว้างไม่จำกัด ส่วนในระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นท่อทรงกระบอกที่มีขนาดจำกัด ซึ่งเมื่อเวลาผ่านไปอัตราการถ่ายเทความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ในระบบพิกัดฉากจะมีค่าน้อยกว่าในระบบพิกัดเชิงขั้วเนื่องจากความหนาของน้ำแข็งที่เพิ่มมากขึ้นส่งผลให้พื้นที่การถ่ายเทความร้อนในระบบพิกัดเชิงขั้วจะมีค่าลดลงจากการที่เป็นกระบวนการแข็งตัวภายในท่อ จึงส่งผลให้อัตราการถ่ายเทความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่มีค่าเพิ่มมากขึ้นทำให้อัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งต่อหนึ่งหน่วยเวลาในระบบพิกัดเชิงขั้วมีค่ามากกว่าในระบบพิกัดฉากโดยจะสิ้นสุดกระบวนการผลิตที่ 31 นาทีซึ่งจะพบว่าความหนาของน้ำแข็งที่ได้ในระบบพิกัดเชิงขั้วมีค่ามากกว่าระบบพิกัดฉากซึ่งมีค่าความผิดพลาดประมาณ 3.097%หรือเทียบเท่าได้กับ 0.36 มิลลิเมตร

**คำหลัก:** น้ำแข็งหลอด, การแข็งตัว, กริดคงตัว, ระบบพิกัดฉาก, ระบบพิกัดเชิงขั้ว

#### Abstract

This article present a simulation of a tubular-ice solidification with comparing numerical method in Cartesian and polar coordinates. It will be a period of time it takes to cure for 10, 20 and 31 minutes, which is used in the production process. The temperature of the refrigerant is constant equal to  $-8^{\circ}\text{C}$  and water inlet is equal to  $35^{\circ}\text{C}$ ,  $30^{\circ}\text{C}$  and  $25^{\circ}\text{C}$  was divided into three cases, the results of the calculations showed that the thickness of the ice from the numerical methods in Cartesian coordinate system will be less than the polar coordinates system in the Cartesian coordinate system has been assumed that the pipe wall as a flat sheet of a width not. In the polar coordinate system is a cylindrical tube with a size

limit. This time, the rate of heat transfer per unit area in a Cartesian coordinate system that is less than in the polar coordinate system due to the increased thickness of the ice, the heat transfer area in a Cartesian coordinate system polar charge is reduced from the solidification process in the pipeline. As a result, the rate of heat transfer per unit area has increased the rate of solidification of ice per unit time in the polar coordinates in the coordinate system is greater than production by the end of 31 minutes. It found that the thickness of the ice in the polar coordinate system greater than Cartesian coordinate system which is an estimate 3.097% or equivalent to 0.36 mm.

**Keywords:** Tubular-Ice, Solidification, Fixed grid, Polar coordinates, Cartesian

## 1. บทนำ

ในปัจจุบันปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการแข็งตัวและการหลอมเหลวของสารส่วนใหญ่เกิดขึ้นอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงสถานะ(phase)หรือการเคลื่อนที่ของขอบเขต(moving boundary) ที่ส่งผลกระทบต่ออุณหภูมิและการไหลของของไหลระหว่างที่มีการแข็งตัวและการละลายของสารนั้น เมื่อของแข็งก่อตัวขึ้นจากการแข็งตัว(freezing) ของของเหลวตรงบริเวณรอยต่อของเฟสของแข็งและของเหลวที่มีความแตกต่างของคุณสมบัติทางกายภาพซึ่งจะมีการเกิดการเคลื่อนที่แยกออกจากกัน [1]

แนวทางในการแก้ปัญหาข้างต้นนั้นเป็นเรื่องที่มีความซับซ้อนมาก เนื่องจากมีการเคลื่อนที่แยกออกจากกันขณะที่มีการรับและคายความร้อนแฝงที่บริเวณรอยต่อเฟสของแข็งและของเหลว ซึ่งเป็นผลทำให้ไม่สามารถทราบถึงตำแหน่งตรงบริเวณรอยต่อทั้ง 2 เฟสก่อนที่จะมีการเคลื่อนที่ ในสารบริสุทธิ์การแข็งตัวของสารบริสุทธิ์จะมีลักษณะเช่นเดียวกับน้ำบริสุทธิ์นั่นก็คือการแข็งตัวจะเกิดขึ้นที่อุณหภูมิที่ไม่ต่อเนื่อง เฟสของแข็งและของเหลวจะถูกแยกออกจากกันโดยมีการเคลื่อนที่อย่างรวดเร็วตรงบริเวณรอยต่อ [1-2]

ในงานวิจัยที่ผ่านมาได้มีการศึกษาถึงพฤติกรรมของการแข็งตัวไม่ว่าจะเป็น การแข็งตัวของสารบริสุทธิ์ [9] และสารละลาย [3] หรือแม้กระทั่งการแข็งตัวของโลหะและการแข็งตัวของน้ำแข็ง ซึ่งการแข็งตัวของน้ำแข็งนี้จะมุ่งเน้นไปที่การทำนายพฤติกรรมการ

แข็งตัวของน้ำแข็ง (น้ำแข็งหลอด+น้ำแข็งซอง) และศึกษาถึงผลกระทบที่มีต่อการแข็งตัวของน้ำแข็ง เช่น อุณหภูมิมีอิทธิพลของสารทำความเย็น [6] ขนาดของท่อทำน้ำแข็งและลักษณะรูปร่างของท่อทำน้ำแข็ง (ท่อเรียบ+ท่อขรุขระ) [7] การติดครีบนอกท่อทำน้ำแข็ง [8] เป็นต้น ซึ่งจะเห็นได้ว่าปัจจัยเหล่านี้จะส่งผลต่อการแข็งตัวของน้ำแข็ง แต่เนื่องด้วยความซับซ้อนของปัญหาการแข็งตัวที่เกิดการเคลื่อนที่ของขอบเขตที่เกิดขึ้นนั้น วิธีการแก้ปัญหาแบบใช้กริดคงตัว(fixed grid)ถือเป็นวิธีที่มีความยืดหยุ่นสูง สามารถใช้ได้กับปัญหาที่มีมากกว่าหนึ่งมิติและมีความแม่นยำสูง จึงเป็นที่นิยมในปัจจุบัน [4]

ดังนั้นจุดมุ่งหมายของงานวิจัยฉบับนี้ คือ การจำลองสำหรับปัญหาการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดโดยการเปรียบเทียบระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้ว เพื่อศึกษาจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดและการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ใช้ในการแข็งตัวในกระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอดโดยการใช้กริดคงตัว

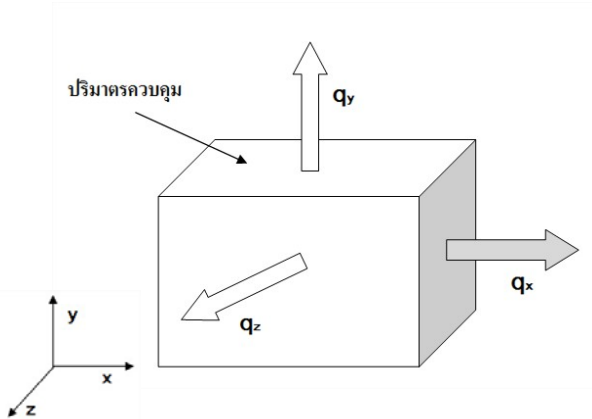
## 2. แบบจำลองและการวิเคราะห์

### 2.1 สมการการถ่ายเทความร้อน

การสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์จะพิจารณาจากสมการควบคุม(Governing equation) และสมการเฉพาะ (Constitutive equation) ได้ดังนี้

### 2.1.1 สมการควบคุม (Governing equation)

รูปที่ 1 แสดงถึงตัวอย่างปริมาตรควบคุมในสามมิติ ที่มีการถ่ายเทความร้อนแบบการนำความร้อนผ่านขอบเขตของปริมาตรควบคุม



รูปที่ 1 ตัวอย่างปริมาตรควบคุม

จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of energy) อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในทั้งหมด  $U$  ของปริมาตรควบคุมเทียบกับเวลา  $t$  มีค่าเท่ากับ ผลรวมของอัตราการถ่ายเทความร้อนสุทธิเข้าสู่ปริมาตรควบคุมและอัตราการผลิตความร้อนขึ้นเองภายในปริมาตรควบคุม  $q_{gen}$  สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการนำความร้อนภายใต้สถานะทั่วไปที่มีอยู่คือ

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + q_{gen} \quad (1)$$

โดยที่  $q_x$ ,  $q_y$  และ  $q_z$  แทนอัตราการถ่ายเทความร้อน (heat transfer rate) ในแนวแกน  $x$ ,  $y$  และ  $z$  ตามลำดับ

### 2.1.2 สมการเฉพาะ (Constitutive equation)

สมการเฉพาะประกอบไปด้วย

1. จากกฎของฟูเรียร์ (Fourier's Law) อัตราการถ่ายเทความร้อน  $\vec{q}$  ขึ้นอยู่กับสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $k$  และความชันของการกระจายของอุณหภูมิ (temperature gradient) ดังนี้

$$\vec{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} - k \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} - k \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \quad (2)$$

ค่าของสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $k$  จะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ  $T$  ในเบื้องต้นจะพิจารณาให้ค่า  $k$  ในแต่ละสถานะมีค่าคงที่

2. พลังงานภายในทั้งหมดเท่ากับมีค่าเท่ากับผลรวมของความร้อนสัมผัส (sensible heat) กับค่าความร้อนแฝง (latent heat) ดังนี้

$$U = \int_{T_{ref}}^T \rho c_s dT \quad \text{เมื่อ } T < T_F \quad (3)$$

$$U = \int_{T_{ref}}^{T_F} \rho c_s dT + \rho L + \int_{T_F}^T \rho c_L dT \quad \text{เมื่อ } T \geq T_F \quad (4)$$

โดยที่  $C_s$  คือ ค่าความจุความร้อนจำเพาะของสสารในสถานะของแข็ง  $C_L$  คือ ค่าความจุความร้อนจำเพาะของสสารในสถานะของเหลว และเนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานภายในจำเพาะ (specific internal energy)  $u$  และเอนทาลปีจำเพาะ (specific enthalpy)  $h$  คือ

$$dh = du + d(Pv) = du + Pdv + vdp \quad (5)$$

โดยที่  $v$  คือปริมาตรจำเพาะ (specific volume) และ  $P$  คือ ความดัน (pressure) สำหรับของเหลวและของแข็งถือว่าไม่สามารถอัดตัวได้ (incompressible)  $dv \approx 0$  จึงได้

$$dh \approx du + vdp \quad (6)$$

และทั้งสองสถานะดังกล่าว ค่าปริมาตรจำเพาะมีค่าน้อยมาก  $v \approx 0$  ดังนั้นจึงได้ว่า

$$dh \approx du \quad (7)$$

### 2.1.3 ตัวแบบทางคณิตศาสตร์

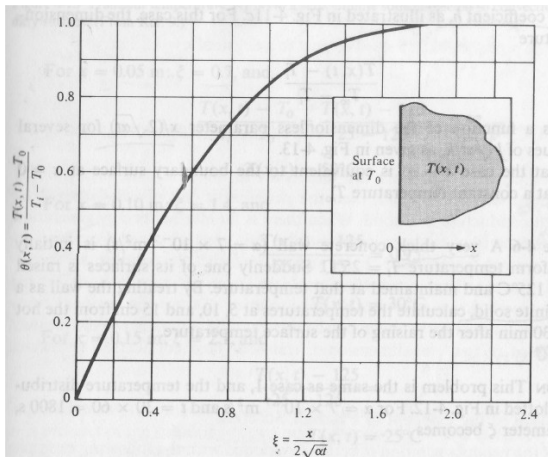
จากสมการที่ (1), (2), (3), (6) และไม่มีการผลิตความร้อนขึ้นเองภายในระบบ ( $q_{gen}=0$ ) จะได้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาของการแข็งตัวของน้ำแข็ง คือ

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (8)$$

เมื่อ  $H = \int_{T_{ref}}^T \rho c_s dT$  เมื่อ  $T < T_F$  (9)

$$H = \int_{T_{ref}}^{T_F} \rho c_s dT + \rho L + \int_{T_F}^T \rho c_L dT$$

เมื่อ  $T \geq T_F$  (10)



**รูปที่ 2** ผลเฉลยแม่นยำตรง

ผลเฉลยแม่นยำตรงของการกระจายตัวของอุณหภูมิในสถานะของแข็ง คือ

$$T_s = T_c + (T_f - T_c) \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\eta_{SL})}, \quad 0 < \eta < \eta_{SL} \quad (11)$$

และการกระจายตัวของอุณหภูมิในสถานะของเหลว คือ

$$T_L = T_i + (T_f - T_i) \frac{\text{erf}(\sqrt{\alpha_s/\alpha_L}\eta)}{\text{erf}(\sqrt{\alpha_s/\alpha_L}\eta_{SL})}, \quad \eta_{SL} < \eta < \infty \quad (12)$$

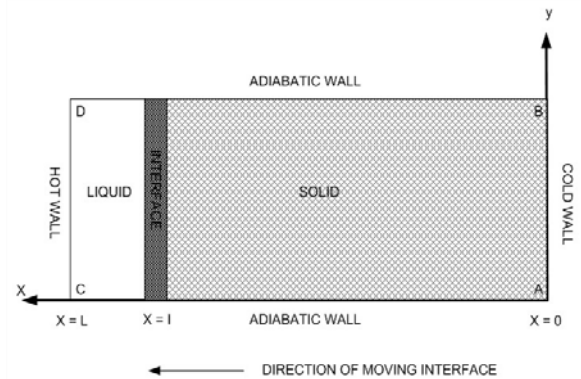
โดย  $\eta_{SL}$  คือค่าตัวแปรไร้มิติของตำแหน่งเส้นแบ่งสถานะ  $X_{SL}$  และหาค่าได้จากสมการพีชคณิตไม่เชิงเส้นตรง (nonlinear algebraic equation) ดังนี้

$$\frac{T_f - T_i}{T_f - T_c} \frac{k_L}{k_s} \frac{\sqrt{\alpha_s} \exp[-(\alpha_s/\alpha_L)\eta_{SL}^2]}{\text{erfc}(\sqrt{\alpha_s/\alpha_L}\eta_{SL})} + \frac{\exp(-\eta_{SL}^2)}{\text{erf}(\eta_{SL})} - \frac{\sqrt{\pi}\eta_{SL}}{Ste} = 0$$

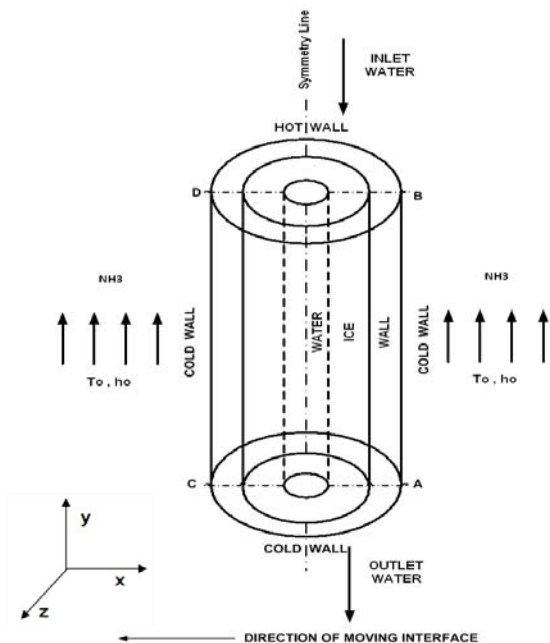
$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}}, \quad \alpha_s = \frac{k_s}{\rho c_s}, \quad \alpha_L = \frac{k_L}{\rho c_L}, \quad Ste = \frac{C_s(T_f - T_c)}{L} \quad (13)$$

โดยที่  $\eta$  คือตัวแปรไร้มิติของระยะทาง  $X$  ส่วน  $\alpha_s$  และ  $\alpha_L$  คือ thermal diffusivity ของสารในสถานะของแข็งและของเหลวตามลำดับ

## 2.2 การจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด



**รูปที่ 3** การจำลองการแข็งตัวในระบบพิกัดฉาก



**รูปที่ 4** การจำลองการแข็งตัวในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ปัญหาการแข็งตัวเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่ปลายด้านหนึ่งของสารบริสุทธิ์ที่มีลักษณะล้อมรอบแบบปิด(enclosure) ดังรูปที่ 3 ซึ่งได้มี การศึกษาการแข็งตัวแบบ 2 มิติในระบบพิกัดฉาก โดยที่ตำแหน่ง  $x = 0$  (cold wall) และ  $x = L$  (hot wall) มีอุณหภูมิคงที่ซึ่งขณะที่ผนังอีก 2 ด้านไม่มีการ รับหรือเสียความร้อนให้กับสิ่งแวดล้อม(adiabatic wall) ซึ่งในสภาวะเริ่มต้นที่ตำแหน่ง  $t = 0$  บริเวณ พื้นที่ ABCD จะมีของเหลว (liquid) ซึ่งมีอุณหภูมิ คงที่ ( $T_i > T_m$ ) และในสภาวะที่ตำแหน่ง  $t > 0$  ดังรูป

ที่ 3 อุณหภูมิจะลดลงต่ำกว่าอุณหภูมิลอมเหลวที่ผนังด้านขวาและหลังจากนั้นก็เกิดการแข็งตัวขึ้นและความหนาของสารบริสุทธิ์ก็จะเพิ่มขึ้นตามเวลาที่เปลี่ยนแปลงไป และจากรูปที่ 4 เป็นการจำลองการแข็งตัวแบบ 3 มิติในระบบพิกัดเชิงขั้วซึ่งเป็นรูปร่างจริงโดยที่ด้าน AB,AC,CD เป็น cold wall และด้าน BD เป็น hot wall โดยน้ำป้อนจะไหลจากด้าน BD และออกสู่อัน AC ตามลำดับ

ในกระบวนการแข็งตัวของน้ำแข็งจะเริ่มก่อตัวจากขอบผนังด้านในของท่อจนกระทั่งมีขนาดที่เหมาะสมและมีแอมโมเนียเป็นสารทำความเย็นอยู่โดยรอบนอกท่อ ดังรูปที่ 3 และ 4 ซึ่งในการแก้ปัญหาครั้งนี้จะพิจารณาเฉพาะการแข็งตัวของน้ำไปเป็นน้ำแข็งเท่านั้น ซึ่งจะมีสมมุติฐานพื้นฐานหลักๆ ดังต่อไปนี้

1. ศึกษารูปปัญหาเป็นระบบพิกัดจากดังรูปที่ 3 และระบบพิกัดเชิงขั้วดังรูปที่ 4
2. ศึกษารูปปัญหาเป็นการเปลี่ยนสถานะใน 2 มิติและ 3 มิติในแนวแกนแบบเปลี่ยนแปลงตามเวลาของน้ำแข็งหลอด
3. อุณหภูมิตามเส้นรอบวงใด ๆ จะมีค่าไม่เปลี่ยนแปลงหรืออาจกล่าวได้ว่าอุณหภูมิไม่เปลี่ยนแปลงไปที่รัศมีเดียวกัน
4. ศึกษารูปปัญหาที่ไม่มีแหล่งพลังงานความร้อนในผนัง
- 5.) ศึกษารูปปัญหาการแข็งตัวเป็นแบบแยกสถานะกันชัดเจนระหว่างสถานะของแข็งและของเหลว (sharp interface) และ อุณหภูมิ ณ รอยแบ่งระหว่างทั้งสองสถานะมีค่าคงที่เท่ากับอุณหภูมิจุดเยือกแข็ง
- 6.) ศึกษารูปปัญหาเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบการนำความร้อน (heat conduction) ในบริเวณของผนังท่อและน้ำแข็ง

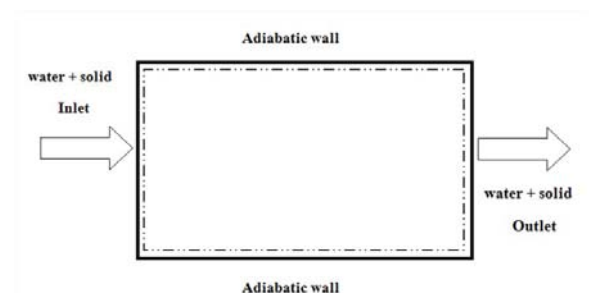
สำหรับค่าของคุณสมบัติต่าง ๆ ของน้ำและน้ำแข็งที่ใช้ในการพิจารณาเป็นดังตารางที่ 1 [5]

ตารางที่ 1 คุณสมบัติของน้ำและน้ำแข็ง

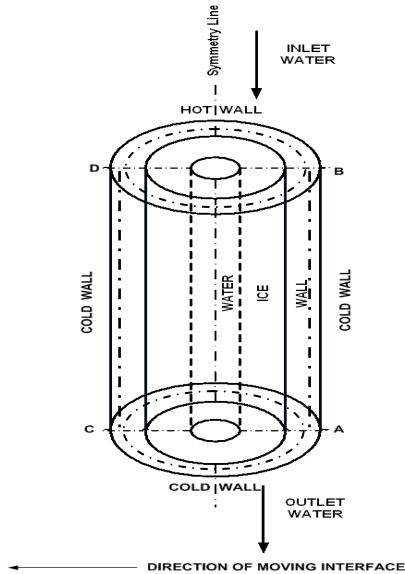
คุณสมบัติ	ค่าที่ใช้
$\rho_{ice}$ (kg/m <sup>3</sup> )	920
$k_{ice}$ (W/m-K)	1.88
$c_{ice}$ (J/kg-K)	2,040
$\rho_{water}$ (kg/m <sup>3</sup> )	1,000
$k_{water}$ (W/m-K)	0.569
$c_{water}$ (J/kg-K)	4,217
$L$ (kJ/kg)	333.7

งานวิจัยการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดนี้ สามารถจำลองได้ด้วยระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข ซึ่งรูปทรงของน้ำแข็งหลอดนี้จะถูกสร้างด้วยโปรแกรมการวาดรูปและนำมาสร้างแบบจำลองตาข่ายข้อมูล (meshing) แล้วนำข้อมูลเข้าสู่โปรแกรมเพื่อใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาซึ่งจากการวิจัยพบว่าการตั้งค่าตัวแปรและค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณที่เหมาะสมจะสามารถทำให้ผลการวิเคราะห์ (simulation) ได้ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) ดังรูปที่ 2 ซึ่งแสดงไว้ในตารางที่ 1 และ 2 จะถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์ในงานวิจัยครั้งนี้

จากความสัมพันธ์ทั้งหมดที่กล่าวมานั้นสามารถจำลองแผนภาพที่ใช้ในการนำมาวิเคราะห์ได้ดังรูปที่ 5 และรูปที่ 6



รูปที่ 5 แผนภาพจำลองความสัมพันธ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ในระบบพิกัดฉาก



รูปที่ 6 แผนภาพจำลองความสัมพันธ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

### 2.3 เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต

#### ตารางที่ 2 Formulation of Case Study

case	initial state	$T_{initial}$	$T_h$	$T_c$
1	น้ำ	35	35	-8
2	น้ำ	30	30	-8
3	น้ำ	25	25	-8

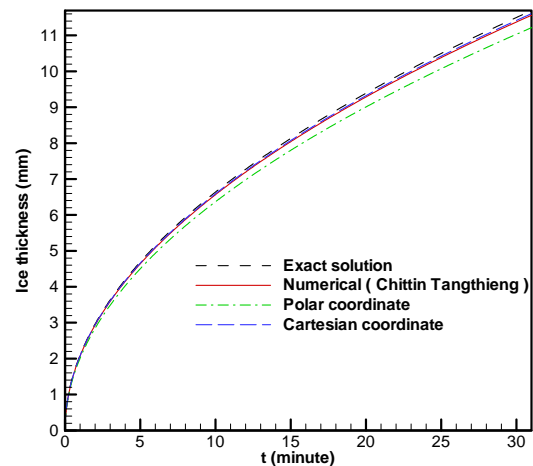
ก่อนที่จะเริ่มการจำลองด้วยระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข ต้องทำการกำหนดค่าเริ่มต้นก่อนโดยที่จะกำหนดให้เวลาที่ใช้ในการเริ่มคำนวณมีค่าเท่ากับ 0 วินาทีซึ่งเงื่อนไขเหล่านี้จะระบุไว้ในทุกกริดสำหรับทุกตัวแปรดังแสดงในตารางที่ 2 และการแก้ปัญหานี้จะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นเหล่านี้ ดังแสดงในรูปที่ 7

### 3. ผลการทดลองและอภิปรายผล

จุดมุ่งหมายของงานวิจัยฉบับนี้ คือ การจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดโดยการเปรียบเทียบระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้ว เพื่อศึกษาการจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดและการกระจายตัวของอุณหภูมิกริดคงตัวซึ่งจะวิเคราะห์ผลการทดลองแต่ละจุดประสงค์ดังต่อไปนี้

### 3.1 การจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด

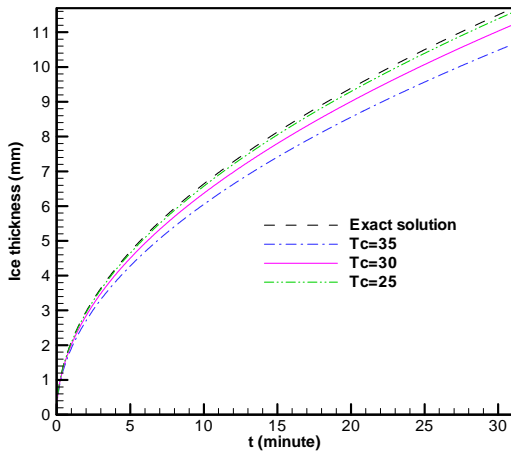
ผลการเปรียบเทียบค่าความหนาของน้ำแข็งหลอดที่วิเคราะห์โดยโปรแกรมเพื่อใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้วในการแก้ปัญหา ผลเฉลยแม่นยำตรงและผลเฉลยที่ได้จากการนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่นที่เวลาต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 7



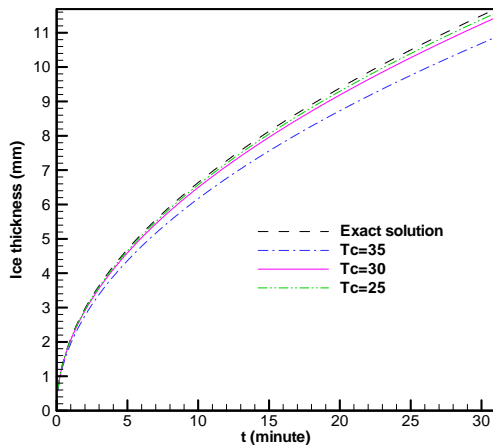
รูปที่ 7 การเปลี่ยนแปลงความหนาของน้ำแข็งเทียบกับเวลา

จากรูปที่ 7 นี้เป็นการเปรียบเทียบค่าของความหนาของน้ำแข็งหลอดที่เวลาต่าง ๆ ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบกันระหว่างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้วในการแก้ปัญหา ผลเฉลยแม่นยำตรงและผลเฉลยที่ได้จากการนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่น ซึ่งในทางทฤษฎีแล้วค่าของความหนาของน้ำแข็งหลอดจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อเวลาผ่านไปและค่าความหนาของน้ำแข็งหลอดนี้จะแปรผันโดยตรงกับรากที่สองของเวลา และเมื่อนำผลการทดลองที่ได้มาเปรียบเทียบกับระหว่างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้วในการแก้ปัญหาและผลเฉลยที่ได้จากการนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่น จะพบว่าคำตอบที่ได้นั้นจะมีค่าต่ำกว่าค่าของความหนาที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรง โดยที่จะมีค่าความคลาดเคลื่อนตั้งแต่เวลาตั้งต้นจนถึงเวลาสิ้นสุดอยู่ที่ประมาณ 22.13% , 18.65% , 4.7% และ 2.6% ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นได้ว่า

ค่าความคลาดเคลื่อนจะมีค่าค่อนข้างสูงในช่วงเริ่มต้นของการแข็งตัว เนื่องจากมีการแกว่งของคำตอบ (oscillated solution) ในระดับต่ำๆ อยู่รอบๆ ค่าที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงและลักษณะของการแกว่งดังกล่าวจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไปจึงส่งผลให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลง



รูปที่ 8 การเปรียบเทียบความหนาของน้ำแข็งเทียบกับเวลาที่อุณหภูมิน้ำป้อน 25 °C, 30 °C และ 35 °C โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉาก



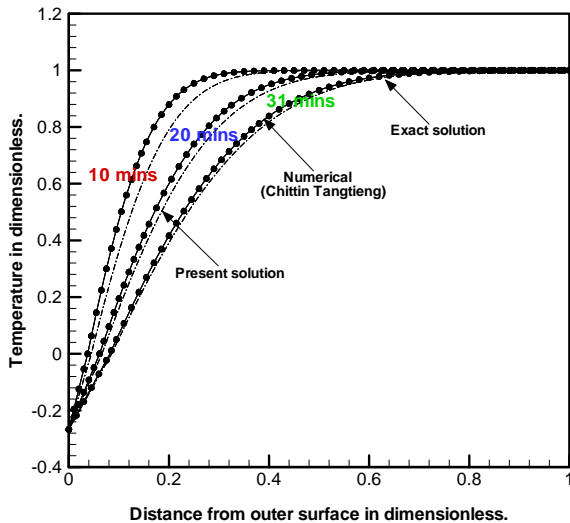
รูปที่ 9 การเปรียบเทียบความหนาของน้ำแข็งเทียบกับเวลาที่อุณหภูมิน้ำป้อน 25 °C, 30 °C และ 35 °C โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดเชิงขั้ว

จากรูปที่ 8 และ 9 เป็นการเปรียบเทียบความหนาของน้ำแข็งเทียบกับเวลาโดยโปรแกรมเพื่อใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้วในการแก้ปัญหาที่อุณหภูมิน้ำป้อน 25 °C, 30 °C และ

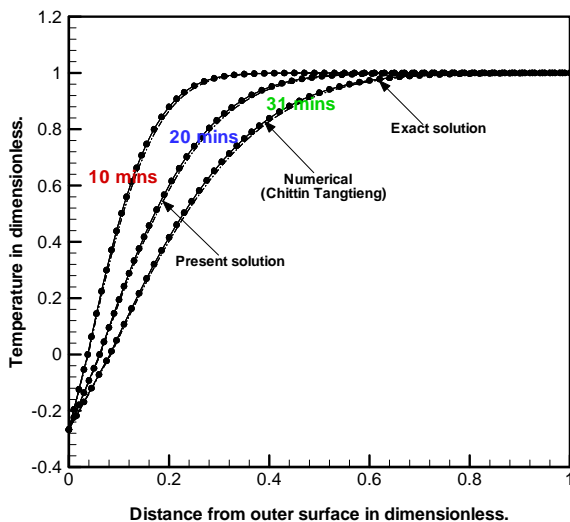
35 °C ทั้งนี้จะกำหนดให้เวลาสุดท้ายของการคำนวณจะสิ้นสุดเมื่อน้ำแข็งหมดมีความหนาเท่ากับ 12 มิลลิเมตร และอุณหภูมิมีมีตัวของแอมโมเนีย ( $T_0$ ) จะถูกตั้งไว้ที่ -8 °C ซึ่งจากรูปที่ 7 และ 8 จะพบว่าถ้าอุณหภูมิน้ำป้อน คือ 35 °C อุณหภูมิจะค่อนข้างสูงเมื่อเทียบกับอุณหภูมิจริงนั่นก็คือ 30 °C ซึ่งความหนาของน้ำแข็งจะมีค่าน้อยเมื่อเวลาผ่านไปเนื่องจากอุณหภูมิน้ำป้อนค่อนข้างสูงส่วนอุณหภูมิ 25 °C อุณหภูมิจะค่อนข้างต่ำเมื่อเทียบกับอุณหภูมิจริงนั่นก็คือ 30 °C ซึ่งความหนาของน้ำแข็งจะมีค่ามากเมื่อเวลาผ่านไปเนื่องจากอุณหภูมิน้ำป้อนค่อนข้างต่ำกว่าอุณหภูมิที่ใช้จริง โดยที่จะพบว่าทั้งสามกรณีเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจะมีความสอดคล้องกันในเชิงคุณภาพโดยที่ค่าความหนาของน้ำแข็งหลอดที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงนี้มีค่ามากกว่าค่าที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาซึ่งจะพบว่าความหนาของน้ำแข็งที่คำนวณได้ในระบบพิกัดเชิงขั้วจะมีค่ามากกว่าระบบพิกัดฉาก 1.8 มิลลิเมตร.

### 3.2 การกระจายตัวของอุณหภูมิ

ผลการเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิตวิเคราะห์โดยโปรแกรมเพื่อใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้วในการแก้ปัญหาผลเฉลยแม่นยำตรงและผลเฉลยที่ได้จากการนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่นที่เวลาต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 10 และ 11



รูปที่ 10 การกระจายตัวของอุณหภูมิที่เวลา 10, 20 และ 31 นาที โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉาก



รูปที่ 11 การกระจายตัวของอุณหภูมิที่เวลา 10, 20 และ 31 นาที โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ผลของการคำนวณในรูปของการกระจายตัวของอุณหภูมิ จากรูปที่ 10 และ 11 เป็นการเปรียบเทียบค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิที่วิเคราะห์โดยโปรแกรมเพื่อใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้วในการแก้ปัญหา ผลเฉลยแม่นยำ และผลเฉลยที่ได้จากการนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่น โดยจะพิจารณาช่วงของเวลาที่ใช้ใน

การกระจายตัวของอุณหภูมิที่เวลา 10, 20 และ 31 นาที ซึ่งเป็นเวลาที่ใช้ในกระบวนการผลิตจริงและเมื่อนำผลการทดลองที่ได้มาเปรียบเทียบกับระหว่างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้วในการแก้ปัญหา ผลเฉลยแม่นยำตรงและผลเฉลยที่ได้จากการนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยอื่น จะพบว่าคำตอบที่ได้นั้นมีค่าความคลาดเคลื่อนของการกระจายตัวของอุณหภูมิจะมีค่าอยู่ที่ 5.1%, 4.7% และ 3.9% ตามลำดับ ซึ่งเป็นที่สังเกตได้ว่าการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ระยะเวลาในช่วงแรกๆมีค่าสูงกว่าระยะเวลาช่วงท้าย เนื่องมาจากบริเวณที่เป็นของแข็งเพิ่มมากขึ้นทำให้เกิดความต้านทานความร้อนที่ต้องระบายออกจากบริเวณของเหลวมีค่าลดลง ทำให้อัตราความหนาที่เพิ่มขึ้นมีค่าลดลง ซึ่งจะเห็นได้ว่าอุณหภูมิมิแนวโน้มลดลงเมื่อความหนาของน้ำแข็งหลอดเพิ่มมากขึ้นโดยอุณหภูมิจะแปรผกผันกับเวลาและความหนาซึ่งจะสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงและผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

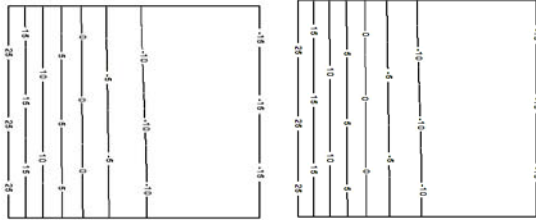
กระบวนการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดจากรูปที่ 12 เป็นการแสดงเส้นอุณหภูมิคงที่ของการแข็งตัวโดยการนำความร้อนที่เวลาต่าง ๆ ซึ่งเส้นของอุณหภูมิที่ได้จะเป็นเส้นในแนวตั้งซึ่งจะเคลื่อนจากผนังเย็นไปผนังร้อนเนื่องจากการแข็งตัว ซึ่งขอบเขตการย้ายนั้นหมายถึง อินเตอร์เฟซที่แข็งตัวที่ผิวระหว่างของแข็งและของเหลวที่อุณหภูมิ  $T_f = 0^{\circ}\text{C}$  จะได้ข้อสรุปที่สำคัญที่สุดก็คือการนำความร้อนในกระบวนการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดในช่วงแรกจะมีค่าสูงและในช่วงท้ายจะต่ำและเกือบจะคงที่ในที่สุด อินเตอร์เฟซจะย้ายออกจากช่องและแข็งตัวสมบูรณ์จนเป็นน้ำแข็งหลอดที่เวลา 31 นาที



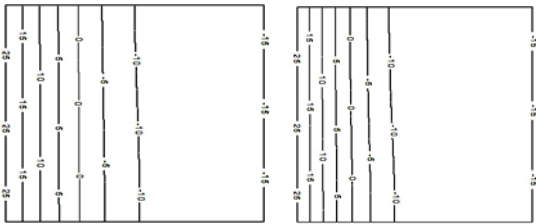
**ระบบพิกัดฉาก**

**ระบบพิกัดเชิงขั้ว**

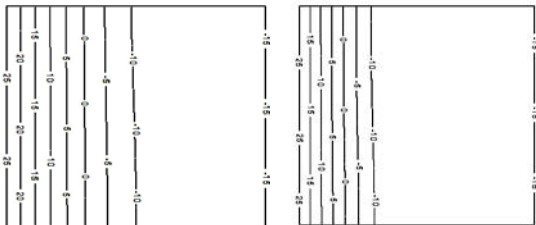
**4. สรุปผล**



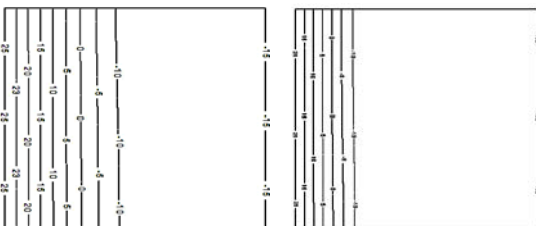
**(a) 4 min**



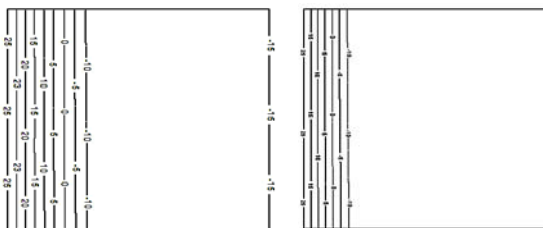
**(b) 8 min**



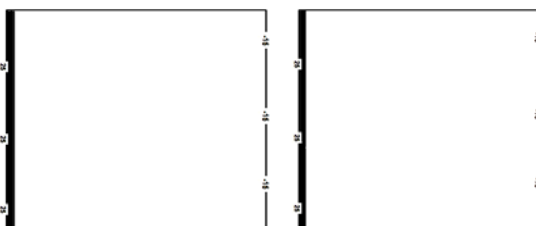
**(c) 12 min**



**(d) 16 min**



**(e) 20 min**



**(f) 31 min**

รูปที่ 12 คอนทัวร์การกระจายตัวของอุณหภูมิที่เวลา 31 นาที

บทความนี้นำเสนอการจำลองสำหรับปัญหาการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดโดยการเปรียบเทียบระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้วเพื่อศึกษาการจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด และการกระจายตัวของอุณหภูมิ โดยจะพิจารณาช่วงของเวลาที่ใช้ในการแข็งตัวที่เวลา 10, 20 และ 31 นาที ซึ่งเป็นเวลาที่ใช้ในกระบวนการผลิตจริง อุณหภูมิของสารทำความเย็นมีค่าคงที่ เท่ากับ  $-8^{\circ}\text{C}$  และอุณหภูมิน้ำขาเข้ามีค่าเท่ากับ  $35^{\circ}\text{C}$ ,  $30^{\circ}\text{C}$  และ  $25^{\circ}\text{C}$  โดยแบ่งออกเป็น 3 กรณี ซึ่งจากผลการคำนวณพบว่าค่าความหนาของน้ำแข็งจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากจะมีค่าน้อยกว่าระบบพิกัดเชิงขั้วโดยในระบบพิกัดฉากได้ทำการสมมุติให้ผนังทอเป็นเสมือนแผ่นเรียบที่มีความกว้างไม่จำกัด ส่วนในระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นทอทรงกระบอกที่มีขนาดจำกัด ซึ่งเมื่อเวลาผ่านไปอัตราการถ่ายเทความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ในระบบพิกัดฉากจะมีค่าน้อยกว่าในระบบพิกัดเชิงขั้วเนื่องจากความหนาของน้ำแข็งที่เพิ่มมากขึ้นส่งผลให้พื้นที่การถ่ายเทความร้อนในระบบพิกัดเชิงขั้วจะมีค่าลดลงจากการที่เป็นกระบวนการแข็งตัวภายในทอ จึงส่งผลให้อัตราการถ่ายเทความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่มีค่าเพิ่มมากขึ้นทำให้อัตราการแข็งตัวของน้ำแข็งต่อหนึ่งหน่วยเวลาในระบบพิกัดเชิงขั้วมีค่ามากกว่าในระบบพิกัดฉากโดยจะสิ้นสุดกระบวนการผลิตที่ 31 นาทีซึ่งจะพบว่าความหนาของน้ำแข็งที่ได้ในระบบพิกัดเชิงขั้วมีค่ามากกว่าระบบพิกัดฉากซึ่งมีค่าความผิดพลาดประมาณ 3.097 % หรือเทียบเท่ากับ 0.36 มิลลิเมตร และในส่วนของ การกระจายตัวของอุณหภูมินั้น ค่าความคลาดเคลื่อนที่วิเคราะห์โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้วนั้นจะมีค่าอยู่ที่ 4.7%, 3.9% และ 3.2% ตามลำดับโดยที่ระยะเวลาในช่วงแรกๆการกระจายตัวของอุณหภูมิจจะมีค่าสูงกว่าระยะเวลาช่วงท้ายเนื่องมาจากบริเวณที่เป็นของแข็งเพิ่มมากขึ้นทำให้เกิดความต้านทานความร้อนที่ต้องระบายออกจาก

บริเวณของเหลวมีค่าลดลง ทำให้อัตราความหนาที่เพิ่มขึ้นมีค่าลดลง ซึ่งจะเห็นได้ว่าอุณหภูมิมีแนวโน้มลดลงเมื่อความหนาของน้ำแข็งไหลเพิ่มมากขึ้นโดยอุณหภูมิจะแปรผกผันกับเวลาและความหนาซึ่งจะสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงและผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้วทั้ง 3 กรณีจะมีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกันกับผลเฉลยแม่นยำอีกด้วย

## 5. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณโรงงานขอนแก่นมิตรภาพที่ให้ทำการทดลองและเก็บข้อมูล สถานจัดการและอนุรักษ์พลังงาน คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น และ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น ที่ได้ทำการสนับสนุนงานวิจัยในครั้งนี้

## 6. เอกสารอ้างอิง

### 6.1 บทความจากวารสาร (Journal)

- [1] Marilena Giorgi, Fulvio Stella, Tomasz A. Kowalewski, "Phase Change Problems with Free Convection: Fixed Grid Numerical Simulation", Computing and visualization in science 2,123-130, 1999.
- [2] A. Kaceniauska, "Infrared Capturing Techniques for Moving Interface Flows", Vilnius Gediminas Technical University, 2002.
- [3] M. Salcudean and Z. Abdullah,"On the Numerical Modeling of Heat Transfer During Solidification Processes,"International Journal for Numerical Methods in Engineering,Vol. 25, 1988, pp. 445-473.

- [4] V. R. Voller and C.R. Swaminathan,"Fixed Grid Techniques for Phase Change Problems: A Review", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 30,875-898 (1990).
- [5] Frank P. Incropera and Dewitt, David P, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, John-Wiley & Sons, New York, USA, 2002, pp. 905-916.

### 6.2 บทความจากเอกสารประกอบการประชุม (Proceedings)

- [6] จิตติน แต่งเที่ยง.การทำนายเชิงตัวเลขของผลของอุณหภูมิมืดตัวของสารทำความเย็นต่ออัตราการไหลของพลังงานต่อหน่วยการผลิตในกระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอด. การประชุมวิชาการเครือข่ายพลังงานแห่งประเทศไทยครั้งที่ 3; วันที่ 23-25 พฤษภาคม 2550 ; โรงแรมไพบยทศกาศ จังหวัดกรุงเทพมหานคร.
- [7] จิตติน แต่งเที่ยง.ผลกระทบของขนาดท่อทำน้ำแข็งต่อความหนา ปริมาณการผลิตและความเข้มของพลังงานในกระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอด. การประชุมวิชาการเครือข่ายพลังงานแห่งประเทศไทยครั้งที่ 2; วันที่ 27-29 กรกฎาคม 2549 ; มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมา.
- [8] ภูวนาท กาบคำ.การศึกษาภาวะความเย็นและอัตราการผลิตน้ำแข็งจากการเพิ่มประสิทธิภาพของกระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอดด้วยวิธีการพ่นแต่งผิวด้วยลูกปราย.การประชุมเชิงวิชาการเครือข่ายพลังงานแห่งประเทศไทยครั้งที่ 1; วันที่ 11-13 พฤษภาคม 2548; โรงแรมแอมบาสซาเตอร์ ซิตี้ จอมเทียน จังหวัดชลบุรี.

### 6.3 หนังสือ

- [9] M. Necati Özisik, Heat Conduction, John-Wiley & Sons, New York, USA, 1993, pp. 405-408.