ME-NETT23 The 23rd Conference of the Mechanical Engineering Network of Thailand

TSF

การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 23
4 – 7 พฤศจิกายน 2552 จังหวัดเชียงใหม่

การจำลองเชิงตัวเลขของเจ็ตสองมิติในกระแสขวางโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

Numerical Simulation of Two-Dimensional Jet in Crossflow Using Finite Volume Method

รุ่งโรจน์ วัฒน์จิรานนท์[1,*] และ สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์[2]

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพ 10330
ติดต่อ: โทรศัพท์: (662) 218-6610, โทรสาร: (662) 2522889,
E-mail: iamsheam@hotmail.com[1], fmespt@eng.chula.ac.th[2]

บทคัดย่อ

บทความนี้กล่าวถึงการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อคำนวณการไหลแบบปั่นป่วนของเจ็ตแบบระนาบในกระแสขวาง โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนารูปแบบการระบายอากาศ การฟุ้งกระจายของฝุ่นหรือสสาร จาก Slot jet ซึ่งสามารถพิจารณาในรูปสองมิติได้ โดยพิจารณาจากวิถีการเคลื่อนที่ของเจ็ต (Jet trajectory) ความเข้มข้นของปริมาณสเกลาร์ (Scalar concentration) และพฤติกรรมการไหลบริเวณใกล้ทางออกของเจ็ต แบบจำลองความปั่นป่วนที่เลือกใช้คือ แบบจำลอง Standard k-ε model โดยพารามิเตอร์ที่พิจารณาคือ อัตราส่วนความเร็วของเจ็ตต่อกระแสขวางที่ค่า 6, 9 และ 10 ผลการคำนวณที่ได้มีลักษณะใกล้เคียงกับการทดลอง และชี้ให้เห็นว่าทิศทางและการกระจายตัวของเจ็ตได้รับผลกระทบจากทิศทางการเคลื่อนที่ของกระแสขวาง โดยความชันของเส้นวิถีการเคลื่อนที่ของเจ็ตเพิ่มขึ้นตามอัตราส่วนความเร็ว

คำหลัก: เจ็ตในกระแสขวาง, การไหลแบบปั่นป่วน, แบบจำลอง Standard k-ε model

Abstract

This article presents a finite volume method for prediction of turbulent plane jet in crossflow. The purpose is to develop two-dimensional air ventilation or substance dissipation models which can be determined by considering the jet trajectory, scalar concentration and flow behavior around the jet exit. The standard k-ε turbulence model is utilized here. The considered parameter is the jet to cross-stream velocity ratios of 6, 9 and 10. The numerical results agree well with the experimental data and show that the direction and dissipation of the jet is effected by the crossflow, i.e., the slope of jet trajectories rises up with the increasing velocity ratios.

Keywords: Jet in crossflow, Turbulent flow, Standard k-ε model

1. บทนำ

การไหลแบบเจ็ตปั่นป่วนในกระแสขวางมีลักษณะทิศทางของเจ็ตที่เบี่ยงเบนไปตามทิศการไหลของกระแสขวางพร้อมกับเกิดการแพร่ซึมหรือผสมกันของของไหลทั้งสองชนิด ซึ่งคุณลักษณะดังกล่าวได้รับความสน ใจและเกิดการประยุกต์ใช้มากมายสำหรับงานทางด้านวิศวกรรม เช่น การระบายความร้อน การฉีดพ่นละอองน้ำมันเชื้อเพลิงเข้าสู่ห้องเผาไหม้ และการปล่อยของเสียลงสู่แม่น้ำ เป็นต้น นอกจากนี้เรายังพบการไหลประเภทนี้ในปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ เช่น ควันจากปล่องภูเขาไฟไหลเข้าสู่ชั้นบรรยากาศอีกด้วย

ในอดีตมีผู้ให้ความสนใจสร้างทฤษฎีเพื่อแก้ปัญหาการไหลแบบเจ็ตในกระแสขวางหลายท่าน Girshovich [1] ได้สร้างความสัมพันธ์ของการไหลในรูปสมการจากการตั้งสมมติฐานในการแก้ปัญหาของเจ็ตแบบระนาบในกระแสขวาง ขณะที่ Carter [2] ได้นำเสนอวิถีโค้งของอุณหภูมิของเจ็ตแบบระนาบในกระแสขวาง โดยผลการทดลองชี้ให้เห็นว่าอุณหภูมิของเจ็ตแปรผันตามทิศการเคลื่อนที่ ส่วน Flacks et al. [3] ได้ทดลองวัดสนามความเร็วด้วย Laser velocimeter ที่อัตราส่วนความเร็วเจ็ตต่อกระแสขวาง ต่างกัน 3 ค่า ได้แก่ 3.1, 8.1 และ 16.2 โดยสรุปว่า เจ็ตมีลักษณะเป็นสองมิติในบริเวณ Mixing region ขณะที่ Huang et al. [4] ทดลองวัดด้วยวิธี Laser-induced fluorescence (LIF) เพื่อดูการกระจายตัวของเจ็ต สำหรับ Ramaprian and Haniu [5] ได้ทดลองเจ็ตแบบระนาบในกระแสขวางด้วยของไหลทั้งแบบ Buoyant jet และ Nonbuoyant jet ที่อัตราส่วนความเร็ว 6, 9 และ 10 นอกจากนี้ยังมีผู้นำเสนอการใช้แบบจำลองความปั่นป่วนประเภท two equation model สำหรับการจำลองแบบของเจ็ตในกระแสขวางแบบระนาบสองมิติ ตัวอย่างเช่นงานของ Demuren [6], Sarkar and Bose [7] และ Kalita et al. [8] ซึ่งให้ผลการคำนวณที่สอดคล้องกับการทดลอง รวมถึงการใช้แบบจำลองความปั่นป่วน LES ในการจำลองแบบที่เสนอโดย Jones and Wille [9] ที่ให้ผลสอดคล้องกับการทดลองเช่นเดียวกันและยังแสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยน Residual scale model ได้ผลการคำนวณที่ไม่ต่างกันมากนัก

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการคำนวณเจ็ตแบบระนาบหรือสองมิติในกระแสขวาง โดยใช้แบบจำลองความปั่นป่วน Standard $k-\varepsilon$ ที่สามารถทำนายคุณลักษณะการไหลโดยทั่วไปที่ไม่ซับซ้อนมาก เช่น วิถีโค้งของเจ็ต การหมุนวนด้านหลังเจ็ต และการแพร่ซึมของกระแสขวาง นอกจากนี้ยังได้เพิ่มการคำนวณปริมาณสเกลาร์ที่เป็นตัวแทนแสดงความเข้มข้นของมวลหรืออุณหภูมิเพื่อศึกษาอิทธิพลที่ได้รับจากพฤติกรรมการไหลในกระแสขวาง

2. ปัญหาและสมการที่เกี่ยวข้อง

ลักษณะของปัญหาได้แสดงในรูปที่ 1 ซึ่งพิจารณาการไหลเป็นแบบปั่นป่วนและอัดตัวไม่ได้ในสองมิติ คุณสมบัติของการไหลมีค่าคงที่ โดยกระแสขวางและเจ็ตเป็นของไหลประเภทเดียวกัน และไม่คิดผลกระทบจากแรงลอยตัวตลอดทั้งขอบเขตที่พิจารณา

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์

สมการการเคลื่อนที่ของการไหลแบบปั่นป่วนนั้นประกอบไปด้วย สมการความต่อเนื่อง และสมการอนุรักษ์โมเมนตัม เช่นเดียวกับการไหลแบบราบเรียบ แต่แบบจำลองความปั่นป่วนมีความซับซ้อนกว่า เนื่องจากการพิจารณาในรูปของค่าเฉลี่ยและค่าการสั่นของการไหลแบบปั่นป่วน จึงได้นำวิธีการเฉลี่ยเรย์โนลด์มาใช้กับสมการการเคลื่อนที่เพื่อแปลงชุดสมการการไหลให้อยู่ในรูปค่าเฉลี่ย รวมทั้งสร้างสมการพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน (k) และสมการ Dissipation rate (ε) ของพลังงานจลน์ความปั่นป่วนเพิ่มขึ้นมา ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบเทนเซอร์ได้ดังต่อไปนี้

สมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (1)$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_i \overline{u}_j\right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\right] - \frac{\partial \rho \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} \qquad (2)$$

สมการพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน

$$\rho\overline{u}_j\frac{\partial k}{\partial x_j}=\tau_{ij}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}-\rho\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \quad (3)$$

สมการ Dissipation rate ของพลังงานจลน์ของความปั่นป่วน

$$\rho\overline{u}_j\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_l}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\tau_{ij}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}-C_{\varepsilon 2}\rho\frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4)$$

โดยมีค่า Eddy viscosity

$$\mu_T=C_\mu\rho\frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5)$$

และ Reynolds stresses

$$\tau_{ij}=2\mu_T\overline{s}_{ij}-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} \quad (6)$$

สำหรับแบบจำลองความปั่นป่วนนี้ใช้ค่าคงที่ซึ่งเสนอโดย Launder and Spalding [10] ดังนี้ $C_\mu=0.09$, $\sigma_k=1.0$, $\sigma_\varepsilon=1.3$, $C_{\varepsilon 1}=1.44$ และ $C_{\varepsilon 2}=1.83$ สำหรับสมการอนุรักษ์สเกลาร์สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_j\overline{C}+\overline{u_j'C'}\right)=\frac{\nu}{Sc}\frac{\partial^2\overline{C}}{\partial x_j{}^2} \quad (7)$$

โดยที่ C เป็นความเข้มข้นของมวล ที่ใช้ในการทำนายทิศทางและบริเวณที่มีความเข้มข้นต่างกันในขอบเขตที่พิจารณา โดยต่อจากนี้จะกำหนดตัวแปร $\overline{u}=u$, $\overline{v}=v$, $\overline{C}=C$ โดยกำหนดให้ $C=1$ สำหรับของไหลเจ็ต และ $C=0$ สำหรับกระแสขวาง ส่วน Sc คือ Schmidt number ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.8

2.2. ขอบเขตการคำนวณและเงื่อนไขขอบ

ขอบเขตที่พิจารณากำหนดให้มีระยะก่อนถึงทางเข้าเจ็ตเท่ากับ $30D$ (เมื่อ D คือขนาดของช่องที่เจ็ตพุ่งออกมา) และระยะหลังทางออกเจ็ตเท่ากับ $400D$ ตามทิศทางการไหลของกระแสขวาง ส่วนระยะในแนวดิ่งหรือในทิศตั้งฉากกับผนังด้านล่างมีขนาด $320D$ โดยใช้ค่าเริ่มต้นและเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผลการทดลองของ Ramaprian and Haniu [5] ซึ่งพิจารณาที่ค่าอัตราส่วนความเร็วเจ็ตต่อกระแสขวาง ($R=u_a/v_j$) เท่ากับ 6 และ 10 โดยกำหนดเงื่อนไขขอบดังนี้

เงื่อนไขขอบที่ทางเข้าสำหรับกระแสขวางให้เป็นการไหลแบบพัฒนาเต็มที่

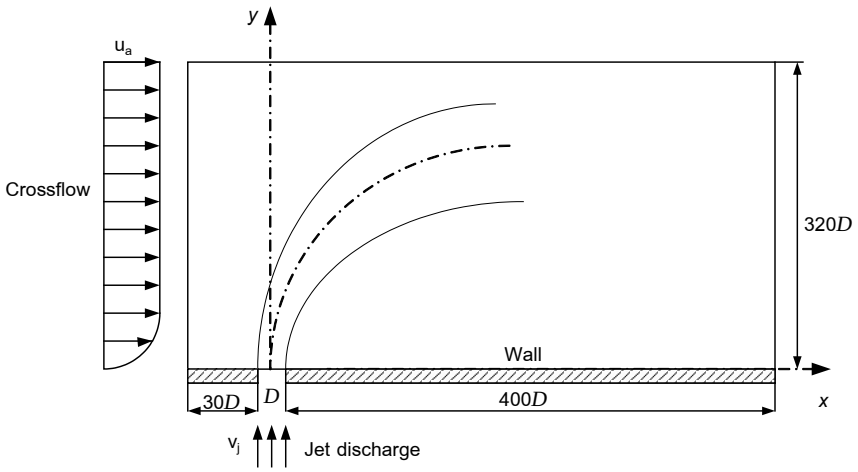
$$v=0,\quad k=0.04u_a^2,\quad \varepsilon=k^{3/2}/0.06y_{\max} \quad (8)$$

ส่วนของไหลเจ็ตกำหนดให้มีความเร็ว (v_j) เป็นแบบสม่ำเสมอและ

$$u=0,\quad k=0.001u_j^2,\quad \varepsilon=k^{3/2}/0.5D \quad (9)$$

สำหรับเงื่อนไขขอบทางออก กำหนดให้ที่ผิวของทางออก ค่าตัวแปรไม่มีการเปลี่ยนค่าตามทิศทางการไหล (Zero gradient)

เงื่อนไขขอบด้านบน พิจารณาเป็นการไหลแบบอิสระ (Free flow) ที่ไม่ก่อให้เกิดผลกระทบกับการ



รูปที่ 1 ขอบเขตของปัญหาเมื่อพิจารณาในสองมิติที่ R = 6 และ 10

ไหลในบริเวณที่สนใจ โดยกำหนดให้ค่าการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามแนวแกน y เป็นศูนย์ และเงื่อนไขสุดท้ายคือเงื่อนไขขอบที่ผนังด้านล่าง เลือกใช้ Wall function ในการกำหนดเงื่อนไขขอบ

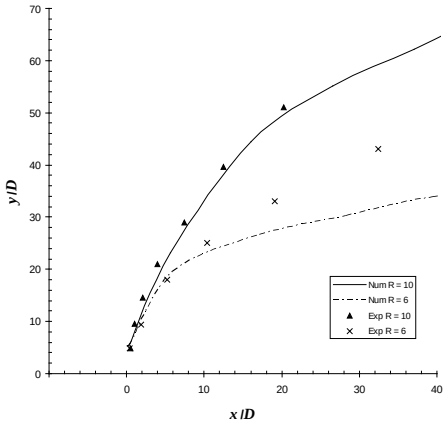
3. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

สมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้นถูกแปลงเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม และใช้ SIMPLE algorithm ในการแก้ปัญหาสนามการไหล เพื่อให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความดันที่ถูกต้อง กริดที่ใช้เป็นแบบเยื้องกันและมีระยะห่างสม่ำเสมอในพิกัดคาร์ทีเซียน โดยเปรียบเทียบประสิทธิภาพของโปรแกรมกับผลการทดลองของ Ramaprian and Haniu [5] ที่ $R = 6$ และ 10 นอกจากนี้ยังได้เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับผลการคำนวณของ Pathak et al. [11] ที่ระนาบกึ่งกลางของ Slot jet

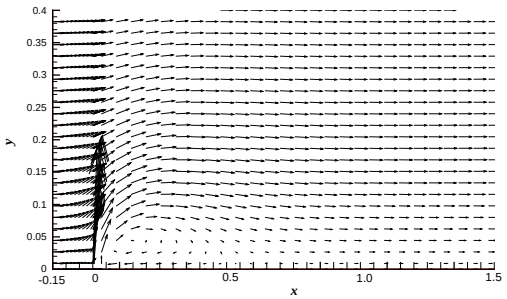
4. ผลการคำนวณ

คุณลักษณะวิถีโค้งของความเร็วเจ็ตจะพิจารณาจากตำแหน่งที่มีความเร็วสูงสุดตามทิศทางการเคลื่อนที่ของเจ็ต และวิถีโค้งของปริมาณสเกลาร์ก็พิจารณาในทำนองเดียวกัน ในรูปที่ 2 ได้เปรียบเทียบวิถีโค้งของความเร็วเจ็ตกับผลการทดลองที่ $R = 6$ และ 10 เห็นได้ว่าผลการคำนวณกับผลการทดลองสอดคล้องกันดีในกรณีที่ค่า R = 10 แต่เมื่อพิจารณาระยะตั้งแต่ x/D = 10 สำหรับผลลัพธ์ในกรณี $R = 6$ พบว่าวิถีโค้งที่คำนวณได้ถูกกดลงต่ำกว่าผลการทดลอง ซึ่งข้อมูลที่ได้จากการทดลองแสดงให้เห็นถึงการแพร่ซึมของเจ็ต (Jet entrainment) ในความเป็นจริงซึ่งมีค่าสูงกว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยเฉพาะในกรณีที่ค่า R ต่ำ นั่นแสดงว่า ค่าอัตราส่วน R ที่ลดลงมีอิทธิพลต่อการไหลของเจ็ตทำให้แนววิถีโค้งของเจ็ตถูกกดลงมากกว่าที่ควรจะเป็น สังเกตได้ว่าลักษณะวิถีโค้งของเจ็ตจะเกิดขึ้นในช่วงสั้นๆ ใกล้กับทางออกของเจ็ตในกรณีที่ R ลดลง หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่าการเพิ่มความเร็วของกระแสขวางทำให้เจ็ตสูญเสียลักษณะของวิถีโค้งได้เร็วขึ้น

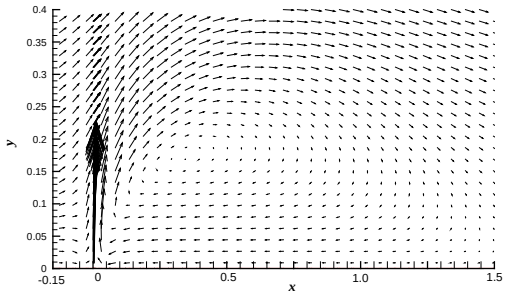
เมื่อพิจารณาการหมุนวนซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากการไหลของเจ็ตในกระแสขวาง ดังแสดงในรูปที่ 3 พบว่าแบบจำลองสามารถแสดงการหมุนวนที่เกิดขึ้นบริเวณด้านล่างของเจ็ต ขนาดของการหมุนวนมีความแตกต่างกันตามค่า R เมื่อ R = 6 ขนาดการไหลวนจะมีขนาดเล็กกว่าที่ R = 10 และสังเกตได้ว่ามีการเปลี่ยนแปลงทิศทางของกระแสขวางก่อนทางออกของเจ็ต โดยการไหลมีทิศพุ่งเข้าหาช่องทางออกในลักษณะแพร่ซึมเข้าไปในเจ็ต



รูปที่ 2 การเปรียบเทียบวิถีโค้งของเจ็ตที่อัตราส่วน R = 6 และ 10



(ก) R = 6

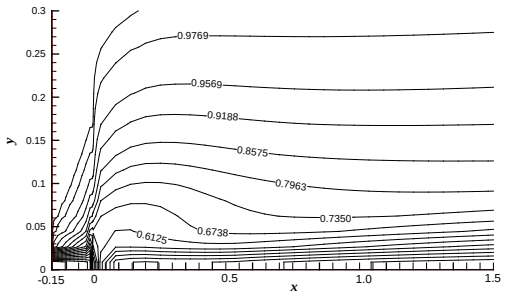


(ข) R = 10

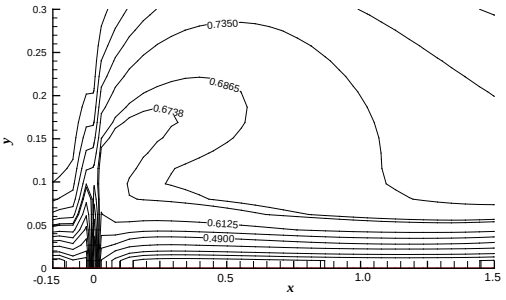
รูปที่ 3 บริเวณที่เกิดกระแสการหมุนวน

นอกจากนี้ค่า R ที่แตกต่างกันยังมีผลให้การกระจายของความเข้มข้นมวลแตกต่างกันโดยมีปริมาณสเกลาร์ที่คำนวณได้เป็นตัวแทนในการเปรียบเทียบ ดังแสดงในรูปที่ 4 กระแสวางที่มีความเร็วน้อยกว่าจะทำให้เกิดบริเวณที่มีความเข้มข้นมวลสูงเคลื่อนที่ไปได้ไกลขึ้นและกระจายตัวไปในบริเวณกว้างกว่ากรณีที่ R = 6 ซึ่งบริเวณที่มีความเข้มข้นมวลสูงจะกระจายตัวได้บริเวณแคบๆใกล้กับผนังด้านล่างตรงทางออกของเจ็ต

ต่อไปจะกล่าวถึงการเปรียบเทียบความสามารถของโปรแกรมที่ใช้แบบจำลอง Standard $k-\varepsilon$ กับงานวิจัย Pathak et al. [11] ซึ่งใช้แบบจำลอง Reynolds stress transport model (RST) โดยที่ใช้ข้อมูลจากผลการทดลองของ Ramaprian and Haniu [11] ในการคำนวณเช่นเดียวกันเพื่อเปรียบเทียบการกระจายตัวของ u และ v ในสนามการไหล

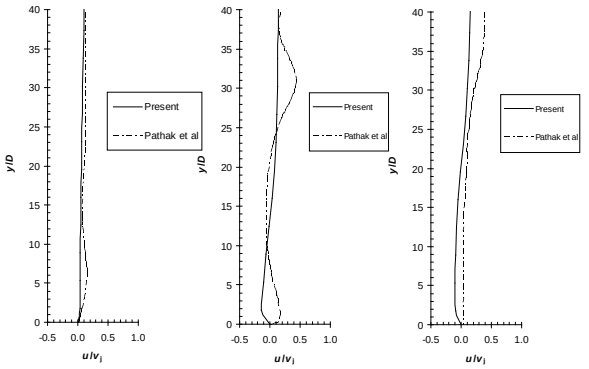


(ก) R = 6



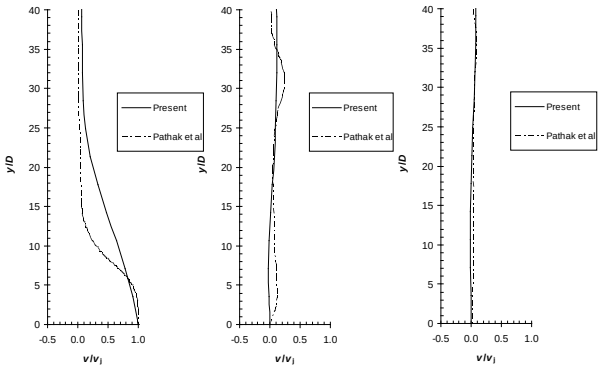
(ข) R = 10

รูปที่ 4 การกระจายตัวของปริมาณสเกลาร์ในรูปของความเข้มข้นมวล



(ก) x/D = 0 (ข) x/D = 10 (ค) x/D = 20

รูปที่ 5 การกระจายตัวของ u ที่ x/D = 0, 10 และ 20



(ก) x/D = 0 (ข) x/D = 10 (ค) x/D = 20

รูปที่ 6 การกระจายตัวของ v ที่ x/D = 0, 10 และ 20

รูปที่ 5 – 6 แสดงการเปรียบเทียบที่ค่า R = 9 สำหรับการกระจายตัวของ u และ v ตามลำดับ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมที่ใช้นี้ค่อนข้างแตกต่างกับแบบจำลอง RST อย่างเห็นได้ชัดโดยเฉพาะในช่วง x/D = 0 ถึง 10 แต่จะมีลักษณะที่ใกล้เคียงกันสำหรับการไหลที่ระยะ x/D = 20 ซึ่งไกลออกมาจากทางออกของเจ็ต โดยสาเหตุของความแตกต่างนี้อาจเนื่องมาจากเงื่อนไขการกำหนดรูปแบบความเร็วของกระแสวางใน Upstream และทางออกของเจ็ตที่ต่างกัน ซึ่งส่งผลต่อความเร็วที่คำนวณได้ ขณะเดียวกันการใช้แบบจำลอง $k-\varepsilon$ ควบคู่กับ Wall function ในบริเวณที่มีการไหลซับซ้อนน่าจะส่งผลกระทบต่อการไหลโดยรวม เนื่องจากลักษณะด้อย

ของแบบจำลองในการทำนายการไหลแบบหมุนวน ส่วนบริเวณที่ไกลจากทางออกเจ็ตมากขึ้นคือที่บริเวณ x/D = 20 นั้นแบบจำลองก็สามารถทำนายได้ใกล้เคียงเหมือนการไหลแบบจำลองความปั่นป่วนทั่วไป ทั้งนี้หากเลือกใช้แบบจำลอง Standard $k-\varepsilon$ คู่กับแบบจำลอง $k-\omega$ หรือที่เรียกว่า แบบจำลอง Menter SST $k-\omega$ [12] อาจจะทำนายผลบริเวณใกล้ทางออกเจ็ตได้ดีขึ้น

5. สรุป

การใช้แบบจำลองความปั่นป่วน Standard $k-\varepsilon$ ในการคำนวณการไหลแบบปั่นป่วนของเจ็ตในกระแสขวางที่พิจารณาในสองมิติสามารถทำนายผลได้ดีสำหรับการประมาณทิศทางการไหลด้วยการหาวิถีโค้งของเจ็ตการกระจายของปริมาณสเกลาร์ และการมองภาพรวมของการไหลวน แต่เมื่อใช้ทำนายผลในบริเวณที่ใกล้กับทางออกของเจ็ตและบริเวณที่มีการผสมกันของกระแสขวางแล้ว พบว่าผลการคำนวณที่ได้ยังไม่ดีพอ ทั้งนี้เนื่องจากแบบจำลองที่ใช้ในการคำนวณยังไม่มีความเหมาะสมเพียงพอสำหรับการคำนวณการไหลที่ซับซ้อนในบริเวณดังกล่าว

6. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากสถาบันวิจัยพลังงาน จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

7. เอกสารอ้างอิง

[1] Girshovich, T.A. (1966). Theoretical and experimental study of a plane turbulent jet in a cross-flow. Izv, AN SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza 1(5), pp. 121-126.

[2] Carter, H.H. (1969). A Preliminary report on the characteristics of a heated jet discharged horizontally into a transverse current, part1-constant depth. Technical Report No. 61, Chesapeake Bay Inst. Johns Hopkins University, Baltimore, MD.

[3] Flacks, R., Dullenkopf, K., and Scherer, V. (1994). Constituency measurements in the mixing region of a cross flow jet using a laser velocimeter. Experiments in Fluids 17, pp.198-204.

[4] Huang, J.F., Davidson, M.J., and Nokes, R.I. (2005). Two-dimensional and line jets in a weak cross-flow. Journal of Hydraulic Research 43, pp. 390-398.

[5] Ramaprian, B.R., and Haniu, H. (1983). Turbulence measurements in plume jets and plumes in cross flow. Technical Report No.266. IIHR. University of Iowa, Iowa City, IA.

[6] Demuren, A.O. (1986). Modeling turbulent jets in crossflow, in N. P. Cheremisinoff (ed.). Encyclopedia of Fluid Mechanics chap. 17 vol. 2. Gulf Publishing Company, Houston TX.

[7] Sarkar, S., and Bose, T.K. (1995). Comparison of different turbulence models for prediction of slot-film cooling, flow and temperature field. Numerical Heat Transfer Part B 28, pp. 217-238.

[8] Kalita, K., Dewan, A., and Dass, A.K. (2002). Prediction of turbulent plane jet in crossflow. Numerical Heat Transfer, Part A 41, pp. 101-111.

[9] Jones, W.P., and Wille, M. (1996). Large-eddy simulation of a plane jet in a cross-flow. J. Heat and Fluid Flow 17, pp. 296-306.

[10] Launder, B.E., and Spalding, D.B. (1974). The numerical prediction of turbulent flows. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3, pp. 269-289.

[11] Pathak, M., Dewan A., and Dass A.K. (2008). Distribution of temperature as a passive scalar in the flow field of a heated turbulent jet in a crossflow. Numerical Heat Transfer, Part A vol.54, pp. 67-92.

[12] Menter, F.R. (1994) Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, AIAA Journal vol.32(8), pp.1598-1605.