

เงื่อนไขและลักษณะการเกิด Bathtub Vortex ที่เกิดจากการฉีดเจ็ตตามแนวสัมผัสในท่อแนวตั้ง

Condition and Characteristic for Bathtub Vortex Generated by Tangential Injection in a Vertical Pipe

กิจติศักดิ์ ไร่ไพจิพงษ์ และ รศ.ดร.อศิ บุญจิตราดุลย์

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพฯ 10330

*ผู้ติดต่อ: E-mail: asi.b@chula.ac.th โทรศัพท์: 02 218 6645 โทรสาร: 02 218 6645

บทคัดย่อ

บทความนี้เสนอผลการศึกษาเงื่อนไขและลักษณะการเกิด Bathtub vortex ที่เกิดจากการฉีดเจ็ตด้วยความเร็วในแนวสัมผัสกับท่อทรงกระบอกแนวตั้งที่ตำแหน่งพื้นด้านล่างสุด โดยท่อทรงกระบอกมีรูทางน้ำออกที่พื้นล่าง การศึกษาทำการทดลองด้วยการถ่ายภาพ ที่อัตราส่วนระหว่างเส้นผ่านศูนย์กลางท่อต่อเส้นผ่านศูนย์กลางเจ็ตคงที่ที่ 12.5 ในงานนี้ได้ศึกษาผลของตัวแปรไร้มิติ 2 ตัวคือ ตัวเลขเรโนลด์ของเจ็ต [$Re_j = V_j d_j / \nu$ หรือ ผลของความเร็วจเจ็ต V_j ซึ่งเป็นความเร็วในแนวสัมผัส] และ อัตราส่วนการหมุนควงเชิงเส้นผ่านศูนย์กลาง [Diametric swirl ratio; $Sr_d = (d/d_j)^2$ หรือ ผลของเส้นผ่านศูนย์กลางของรูทางน้ำออกที่พื้นล่าง d] เมื่อ d_j คือเส้นผ่านศูนย์กลางของเจ็ต และ ν คือความหนืดคินแมติกของของไหล การศึกษาทำที่ค่า Re_j ในช่วง 2,600 ถึง 40,000 และ Sr_d เท่ากับ 0.8, 2.0, 4.0 ผลการศึกษาพบว่า เมื่อแปรเปลี่ยน Re_j และ Sr_d (หรือ เมื่อแปรเปลี่ยนความเร็วของเจ็ตและขนาดรูทางออก) จะเกิดลักษณะการไหลหมุนควงแบบวงอากาศ 5 รูปแบบ เรียงลำดับตาม Re_j ที่เพิ่มขึ้นที่ Sr_d คงที่ คือ **รูปแบบที่ 1** เมื่อ Re_j มีค่าน้อย จะเกิด bathtub vortex ที่ 'คงตัวในแนวตั้ง' และยึดตัวเต็มที่ กล่าวคือ วอร์เท็กซ์จะยึดตัวสุดจากผิวน้ำลงมาถึงรูทางออกด้านล่างอย่างคงตัวไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา ทำให้อัตราส่วนการยึดตัว ซึ่งนิยามเป็นอัตราส่วนระหว่าง ความลึกของวงอากาศวัดจากผิวน้ำ $[h]$ ต่อความสูงของระดับน้ำ $[H]$ คงตัวไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาและมีค่าเป็นหนึ่ง $[h/H = 1]$ **รูปแบบที่ 2** เมื่อ Re_j มีค่าเพิ่มขึ้น bathtub vortex จะ 'แกว่งตัวเป็นคาบตามแนวตั้ง' กล่าวคือ วอร์เท็กซ์จะเปลี่ยนสภาวะไปมาระหว่างสภาวะยึดตัวสุดและยึดตัวเพียงบางส่วน และ ยึดและหลุดตัวกลับไปมาตามเวลาเป็นคาบ ทำให้ อัตราส่วนการยึดตัวแกว่งไปมาระหว่างสภาวะยึดตัวสุด ($h/H = 1$) และยึดตัวเพียงบางส่วน ($0 < h/H < 1$), $[0 < h/H \leq 1]$ นอกเหนือจากนั้น ระดับน้ำจะเปลี่ยนไปมาเป็นคาบเช่นเดียวกัน **รูปแบบที่ 3** เมื่อ Re_j มีค่าเพิ่มขึ้นอีก จะเกิด bathtub vortex ที่ 'คงตัวในแนวตั้ง' แต่จะยึดตัวเพียงบางส่วนเท่านั้น $[0 < h/H < 1]$ และระดับน้ำจะคงตัวตามเวลา ในรูปแบบนี้จะสังเกตเห็นฟองอากาศขนาดเล็กแยกตัวออกมาจากปลายวงแล้วไหลลงสู่รูทางออกเป็นระยะระยะ **รูปแบบที่ 4** เมื่อ Re_j มีค่าเพิ่มขึ้นอีก จะเกิด bathtub vortex ที่ 'คงตัวในแนวตั้ง' แต่จะยึดตัวเพียงบางส่วนเท่านั้น $[0 < h/H < 1]$ เหมือนกับรูปแบบที่ 3 แต่จะต่างจากรูปแบบที่ 3 คือ จะไม่มีฟองอากาศขนาดเล็กแยกตัวออกมาจากปลายวงอากาศ **รูปแบบที่ 5** ในที่สุดเมื่อ Re_j มีค่าสูงขึ้นอีก จะไม่เกิด bathtub vortex และวงอากาศอีกต่อไป $[h/H = 0]$ เมื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง อัตราส่วนการยึดตัว $[h/H]$ กับ Re_j ในบริเวณรูปแบบที่ 2 ถึง 4 จะพบว่าที่ Sr_d ต่างกันจะมีความสัมพันธ์ระหว่าง อัตราส่วนการยึดตัว $[h/H]$ กับ Re_j ต่างกัน แต่จะมีแนวโน้มไป

ในทางเดียวกัน คือจะประมาณได้ว่าเป็นระฆังคว่ำครึ่งซีกนับจากจุดตัดที่ปลายรูปแบบที่ 1 โดยเมื่อ Sr_d เพิ่มขึ้น จุดตัดที่ปลายรูปแบบที่ 1 จะเกิดขึ้นที่ค่า Re_j สูงขึ้น, รูปแบบการเกิดแต่ละรูปแบบจะครอบคลุมช่วง Re_j ที่กว้างขึ้น และ รูปร่างความสัมพันธ์ระฆังคว่ำจะกว้างขึ้น อย่างไรก็ตาม เมื่อรวบตัวแปรไร้มิติ Re_j และ Sr_d เข้าด้วยกัน โดยนิยามเป็นตัวแปรใหม่ คือ $\alpha = Re_j / Sr_d$ แทนที่ Re_j แล้ว พบว่าความสัมพันธ์ $h/H - Re_j$ ที่ Sr_d ต่างกันจะยุบตัวเป็นความสัมพันธ์ $h/H - \alpha$ เดียวกัน ไม่ขึ้นกับค่า Re_j หรือ Sr_d โดยเฉพาะ นอกจากนั้น พบว่า จุดตัดที่ปลายรูปแบบที่ 1 ซึ่งเป็นจุดที่วอร์เท็กซ์เริ่มจะหลุดจากรูปแบบคงตัวในแนวตั้ง จะเกิดที่ $\alpha = 6,800$ ในขณะที่จุด $1/e^2$ ซึ่งเป็นจุดที่ $h/H = 0.135$ ซึ่งในทางปฏิบัติอาจถือว่าไม่เกิด bathtub vortex แล้วจะเกิดขึ้นที่ $\alpha = 11,600$

คำสำคัญ: bathtub vortex, tangential jet, swirl ratio, Reynolds number

Abstract

The condition under which a bathtub vortex is formed, if it does form, and the characteristics of the formed bathtub vortex generated by tangential jet injection at the bottom of a vertical tube with draining orifice are investigated. An experiment is conducted via flow visualization for a fixed tube-to-jet diameter ratio (D/d_j) of 12.5. The effects of both the Reynolds number, $Re_j = V_j d_j / \nu$, (or of the jet tangential velocity) and the diametric swirl ratio, $Sr_d = (d/d_j)^2$, (or of the draining orifice diameter) are investigated. d is the draining orifice diameter; V_j , average jet velocity; and ν , fluid kinematic viscosity. The parameter space spans the Re_j of 2,600 to 40,000 and the Sr_d of 0.8, 2.0, and 4.0. The result shows that, as Re_j and Sr_d are varied (or as the tangential jet velocity and the draining orifice diameter are varied), there exist five flow regimes. At a fixed Sr_d , these five flow regimes are as follows, in the order of increasing Re_j . Flow Regime 1: when Re_j is small, a 'vertically steady' bathtub vortex is formed and it fully stretches, i.e., it fully extends from the free surface at the top all the way down to the draining orifice at bottom of the tube, resulting in the vortex stretching ratio, defined as the length of the vortex to the water height ratio (h/H), of one [$h/H = 1$]. Flow Regime 2: as Re_j increases, the vortex is 'vertically oscillating'; it periodically alternates between the states of fully stretch and partially stretch, and stretching and retracting. The vortex stretching ratio fluctuates periodically between fully stretch ($h/H = 1$) and partially stretch ($0 < h/H < 1$), [$0 < h/H \leq 1$]. In addition, the water height (or the water height to orifice diameter ratio) also fluctuates accordingly. Flow Regime 3: a vertically steady, but only partially-stretched vortex [$0 < h/H < 1$], is formed, and the water height becomes steady again. In addition, small air bubbles are observed to periodically detach from the tip of the vortex and are convected down and out through the draining orifice at the bottom of the tube. Flow Regime 4: a vertically steady, but only partially-stretched vortex [$0 < h/H < 1$] is formed, like in Flow regime 3. However, there is no longer air bubble detachment from the tip of the vortex. Flow Regime 5: finally, when Re_j is large enough, there is no formation of a bathtub vortex [$h/H = 0$]. When consider the relations between the vortex stretching ratio h/H and Re_j in flow regimes 2 to 4 at various Sr_d 's, it is found that the relations at different Sr_d 's can be approximated by half-gaussian curves from the cut-off point at the end of flow

regime 1. However, different Sr_d 's render different relations. As Sr_d increases, the cut-off point at the end of flow regime 1 occurs at higher Re_j , each flow regime spans a wider range of Re_j , and the gaussian curve broadens. However, when a new dimensionless number α - defined as $\alpha = Re_j / Sr_d$, a combination of Re_j and Sr_d - is introduced in place of the Reynolds number Re_j , it is found that all the $h/H - Re_j$ curves at different Sr_d 's collapse onto only one $h/H - \alpha$ relation, independent of both Re_j and Sr_d . The cut-off point at the end of flow regime 1, where the vortex starts to retract from a vertically-steady fully-stretch position, is found to occur at $\alpha = 6,800$; while the $1/e^2$ point, where the vortex stretching ratio h/H is 0.135 and for some practical purpose the vortex may be considered vanished, is found to occur at $\alpha = 11,600$.

Keyword: bathtub vortex, tangential jet, swirl ratio, Reynolds number

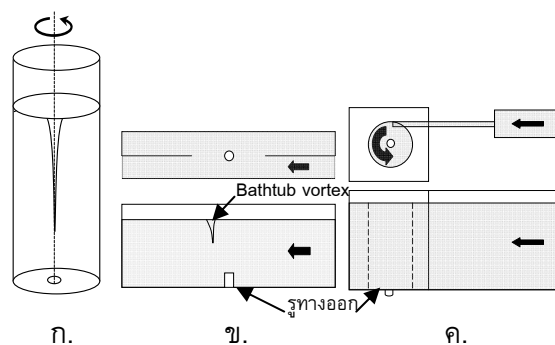
1. บทนำ

Bathtub vortex เป็นลักษณะของการเกิดการหมุนควงแบบหนึ่งของการไหลที่มีพื้นผิวอิสระ (พื้นผิวของน้ำที่อยู่ติดกับอากาศ) เกิดขึ้นเมื่อการไหลมีความเร็วตามแนวแกนและความเร็วตามแนวสัมผัสพร้อมกัน รูปร่างของ Bathtub vortex จะมีลักษณะที่สำคัญคือ มีการเสียรูปของพื้นผิวอิสระเกิดเป็นลักษณะของวงอากาศขึ้นภายในของเหลว โดยวงอากาศที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะและความยาวที่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ เช่น ความเร็วตามแนวแกน ความเร็วตามแนวสัมผัส และระดับของของเหลว

Andersen *et al.* [1] ได้ศึกษา Bathtub vortex ด้วยการสร้าง Bathtub vortex โดยการหมุนท่อทรงกระบอกรอบแกนกลางเพื่อสร้างความเร็วตามแนวสัมผัสให้กับน้ำและสร้างความเร็วตามแนวแกนโดยปล่อยให้ น้ำไหลออกจากท่อทรงกระบอกด้วยแรงโน้มถ่วงของโลกผ่านรูที่เจาะที่พื้นของท่อทรงกระบอกกลม ดังแสดงดังรูปที่ 1 ก. โดยควบคุมให้ระดับน้ำในท่อทรงกระบอกมีค่าคงที่ พบว่าเมื่อหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมน้อยสอดคล้องกับความเร็วตามแนวสัมผัสที่มีค่าน้อย พบว่าการเสียรูปของผิวอิสระจะน้อย ส่งผลให้ความยาวของวงอากาศที่ลึกลงไปจากผิวน้ำน้อย เมื่อเพิ่มความเร็วเชิงมุมให้มากขึ้นสอดคล้องกับความเร็วตามแนวสัมผัสที่มีค่ามากขึ้น พบว่าการเสียรูปของผิวอิสระจะมากขึ้นส่งผลให้ความยาวของวงอากาศที่ลึกลงไปจากผิวน้ำยาวเพิ่มขึ้น และจะ

สังเกตเห็นฟองอากาศขนาดเล็กแยกตัวออกมาจากปลายของวงอากาศแล้วไหลลงสู่พื้นท่อ เมื่อเพิ่มความเร็วเชิงมุมให้สูงขึ้นอีกสอดคล้องกับความเร็วตามแนวสัมผัสที่สูงขึ้นอีกพบว่าฟองอากาศที่แยกตัวออกมาจากวงอากาศจะมีความถี่เพิ่มขึ้นจนความเร็วเชิงมุมมากพอจนทำให้ความลึกของวงอากาศยาวจากผิวน้ำลงมาถึงพื้นทางออก

Bergmann *et al.* [2] ศึกษา Bathtub vortex ด้วยการสร้าง Bathtub vortex ในลักษณะเดียวกับ Andersen *et al.* [1] พบว่าเมื่อเพิ่มความเร็วเชิงมุม



รูปที่ 1 การสร้าง Bathtub vortex ด้วยวิธีการต่าง ๆ

- ก. การหมุนท่อด้วยความเร็วเชิงมุมรอบแกนกลาง [1,2]
- ข. การปล่อยให้ น้ำไหลผ่านช่องทางเปิดตามแนวราบสัมผัส [3]
- ค. การฉีดเจ็ตระนาบ (Plane Jet) ตามแนวสัมผัสกับท่อทรงกระบอก [4]

มากขึ้น นอกจากจะทำให้ความถี่ของฟองอากาศที่แยกตัวออกมาจากปลายปลายวงอากาศเพิ่มขึ้นแล้วยังทำให้ขนาดของฟองอากาศที่หลุดออกมามีขนาดเล็กลง

Ezure *et al.* [3] ศึกษาพฤติกรรมของ Bathtub vortex โดยพิจารณาจากการเกิดวงอากาศและฟองอากาศที่แยกตัวออกมา โดยทำให้เกิด Bathtub vortex ด้วยการปล่อยให้น้ำไหลในช่องทางเปิดที่มีการไหลไม่เต็มหน้าตัดเพื่อสร้างความเร็วตามแนวสัมผัสและเจาะรูที่ตรงกึ่งกลางทางด้านล่างของทางน้ำไหลเพื่อต่อกับหัวฉีด (Nozzle) เพื่อสร้างความเร็วตามแนวแกน และรักษาระดับน้ำให้คงที่ ตามรูปที่ 1 ข. เพื่อดูผลของความเร็วตามแนวแกน และความเร็วตามแนวสัมผัสที่มีผลต่อลักษณะการเกิด พฤติกรรมของวงอากาศ และฟองอากาศที่เกิดขึ้น พบว่าลักษณะของการเกิด Bathtub vortex 3 รูปแบบคือ 1) ไม่มีการเหนียวอากาศออกไปที่รูทางออก (No Gas Entrainment) 2) เกิดการแยกตัวของฟองอากาศออกจากปลายวงอากาศแล้วไหลลงสู่รูทางออก โดยที่ปลายวงอากาศจะลึกไม่สุดถึงรูทางออก 3) วงอากาศยาวไปสุดถึงรูทางออกทางด้านล่างและไม่ปรากฏฟองอากาศที่แยกตัวออกมา โดย Bathtub vortex ที่เกิดขึ้นนั้นจะเกิดเยื้องกับรูทางออก ตามรูปที่ 1 ข. และเงื่อนไขการเกิด Bathtub vortex ทั้ง 3 รูปแบบนั้นขึ้นอยู่กับความเร็วตามแนวสัมผัสและความเร็วตามแนวแกน

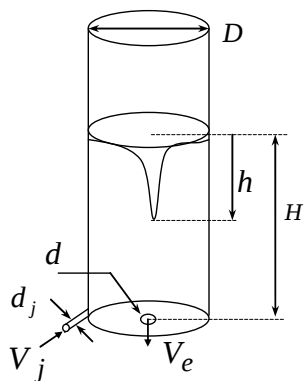
Monji และ Shinozaki [4] ศึกษาลักษณะของวงอากาศโดยการสร้าง Bathtub vortex โดยการฉีดเจ็ตรอบ (Plane Jet) ไปในแนวสัมผัสกับท่อกลมที่ความสูงของน้ำคงที่เพื่อสร้างความเร็วตามแนวสัมผัสและมีการเจาะรูที่พื้นทางออกที่กึ่งกลางของท่อทรงกระบอกให้น้ำตกอย่างอิสระเพื่อสร้างความเร็วตามแนวแกน ดังรูปที่ 1 ค. พบว่าอุณหภูมิ ความสูง และแรงตึงผิวของน้ำที่ใช้ทดลองมีผลต่อความยาวของวงอากาศที่เกิดขึ้น

จากงานวิจัยที่ผ่านมา จะพบว่าเงื่อนไขการเกิด Bathtub vortex นั้นมีองค์ประกอบที่สำคัญ

นอกเหนือจากองค์ประกอบอื่นๆอีกคือ ความเร็วตามแนวสัมผัส และความเร็วตามแนวแกนดัง โดยลักษณะการสร้างความเร็วตามแนวสัมผัสในงานวิจัยในอดีตส่วนใหญ่ นั้นมักจะอยู่ในรูปแบบที่ค่อนข้างซับซ้อน และมีความเหมือนร่วมกันคือ เป็นการสร้างความเร็วตามแนวสัมผัสที่คงที่ตลอดความสูงของระดับน้ำ เช่น ทรงกระบอกหมุน (no-slip condition ทำให้ความเร็วตามแนวสัมผัสคงที่ที่ผนังตลอดระดับความสูงของน้ำ) หรือ เจ็ตรอบ (เจ็ตรอบฉีดออกมาตลอดแนวระดับความสูงของน้ำ ทำให้ความเร็วตามแนวสัมผัสคงที่ตลอดระดับความสูงของน้ำ) ถ้าตั้งสมมติฐานว่าพารามิเตอร์ที่สำคัญที่สุดในเบื้องต้นของเงื่อนไขการเกิด Bathtub vortex คือความเร็วทั้งสองแนวข้างต้น ดังนั้น ลักษณะและรูปแบบของการสร้างความเร็วตามแนวสัมผัสควรจะมีผลสำคัญต่อการเกิด Bathtub vortex น้อยกว่า ตรงกันข้ามที่สามารถทำให้เกิดความเร็วตามแนวสัมผัสและความเร็วตามแนวแกนที่เหมาะสมได้

งานวิจัยนี้จึงมีความสนใจที่จะศึกษาเงื่อนไขและลักษณะการเกิด Bathtub vortex ด้วยวิธีการสร้างความเร็วตามแนวสัมผัสด้วยวิธีที่ต่างจากงานวิจัยที่ผ่านมา กล่าวคือ การสร้างความเร็วตามแนวสัมผัสด้วยการฉีดเจ็ตรอบตามแนวสัมผัสที่พื้นด้านล่างของท่อทรงกระบอกดังแสดงในรูปที่ 2 ดังนั้น เงื่อนไขลักษณะการสร้าง Bathtub vortex ในกรณีนี้ จะแตกต่างจากงานวิจัยในอดีตคือ ไม่มีการควบคุมให้ความเร็วตามแนวสัมผัสคงที่ตลอดระดับความสูงของน้ำ นอกเหนือจากนั้น ในงานวิจัยนี้ก็จะไม่ควบคุมระดับน้ำให้คงที่ดังงานวิจัยในอดีต (ระดับน้ำไม่ถูกกำหนดให้เป็นตัวแปรควบคุม) แต่จะให้เป็นตัวแปรตามในการทดลอง สำหรับการสร้างความเร็วตามแนวแกนดังนั้นจะสร้างโดยวิธีการเจาะรูทางออกที่พื้นท่อทรงกระบอกเหมือนงานวิจัยในอดีต

การสร้างความเร็วตามแนวสัมผัสโดยวิธีที่แตกต่างจาก [1-4] จึงจะเกิดคำถามที่น่าสนใจคือ 1) ความเร็วตามแนวสัมผัสในลักษณะนี้จะทำให้เกิด Bathtub vortex หรือไม่ 2) ถ้าเกิด Bathtub vortex



รูปที่ 2 การสร้าง Bathtub vortex ด้วยการฉีดเจ็ตกลตามแนวสัมผัสที่ด้านล่างของท่อทรงกระบอก และพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง

แล้ว Bathtub vortex จะเกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขใดและจะมีลักษณะเป็นอย่างไร

โดยสรุป งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาเงื่อนไขและลักษณะการเกิด Bathtub vortex ที่เกิดจากการฉีดเจ็ตกลตามแนวสัมผัสที่ด้านล่างของท่อแนวตั้ง โดยจะศึกษาถึง 1) ผลของการเปลี่ยนความเร็วเจ็ตสัมผัส ซึ่งจะสอดคล้องกับการเปลี่ยนตัวเลขเรโนลด์ของเจ็ต (Re_j) และ 2) ผลของการเปลี่ยนขนาดของรูทางออกซึ่งจะสอดคล้องกับการเปลี่ยนอัตราส่วนการหมุนควงเชิงเส้นผ่านศูนย์กลาง (Sr_d) ดังรายละเอียดในหัวข้อที่ 2

2. พารามิเตอร์ไร้มิติที่สำคัญ

ในเบื้องต้น ผู้วิจัยคาดว่าตัวแปรไร้มิติที่สำคัญต่อการเกิด Bathtub vortex ความสูงของระดับน้ำ (H) และความลึกของวงอากาศจากผิวน้ำ (h) เมื่อมีการฉีดเจ็ตทางด้านล่างในท่อแนวตั้งคือ (รูปที่ 2)

1. เส้นผ่านศูนย์กลางของท่อทรงกระบอกแนวตั้ง (D)
2. เส้นผ่านศูนย์กลางของรูทางออกที่ด้านล่างของท่อแนวตั้ง (d)
3. เส้นผ่านศูนย์กลางภายในท่อเจ็ต (d_j)
4. ความเร็วที่ออกจากปากเจ็ต (V_j)
5. ความหนืดคิเนแมติกส์ของของไหล (ν) และ

6. ความหนาแน่นของของไหล (ρ)

เมื่อนำตัวแปรทั้งหมดมาเขียนในรูปของฟังก์ชัน เมื่อตัวแปรที่อยู่ทางซ้ายมือของสมการเป็นตัวแปรตาม และตัวแปรที่อยู่ทางขวามือของสมการเป็นตัวแปรอิสระจะได้ดังสมการ

$$h, H = f(D, d, d_j, V_j, \nu, \rho) \quad (1')$$

กล่าวคือระดับความสูงของน้ำ (H) และระดับความลึกของวงอากาศจากผิวน้ำ (h) จะขึ้นอยู่กับ D, d, d_j, V_j, ν และ ρ

เมื่อวิเคราะห์มิติของตัวแปรในสมการที่ (1') และทำเป็นตัวแปรไร้มิติ จะสามารถเขียนสมการที่ (1') ใหม่ได้เป็น

$$\left. \begin{matrix} h/d_j \\ H/d_j \end{matrix} \right\} = f(V_j d_j / \nu, d/d_j, D/d_j) \quad (2')$$

จากสมการที่ (2') จะสังเกตเห็นว่าไม่ปรากฏ ρ อยู่ เมื่อกลับไปพิจารณาสมการที่ (1') จะพบว่า ρ เป็นตัวแปรตัวเดียวที่มีมิติของมวลอยู่ จึงไม่สามารถฟอร์มพารามิเตอร์ไร้มิติกับตัวแปรอื่นๆ ได้ จุดนี้ชี้แนะในเบื้องต้นว่า ρ ไม่มีผลต่อการไหลนี้ เราจึงสามารถทบทวนสมการ (1') ใหม่ได้เป็น

$$h, H = f(D, d, d_j, V_j, \nu) \quad (1)$$

ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าตัวแปรเหล่านี้มีมิติพื้นฐานเป็นความยาวและเวลาเท่านั้น และสามารถวิเคราะห์มิติใหม่ได้เป็น

$$\left. \begin{matrix} h/H \\ H/d_j \end{matrix} \right\} = f(V_j d_j / \nu; d/d_j; D/d_j) \quad (2)$$

โดยเพื่อความเหมาะสม เราได้จัดตัวแปรไร้มิติตามใหม่จากสมการ (2') เป็นดังสมการ (2) ในที่นี้ จะใช้เครื่องหมายอัฒภาค (;) แบ่งช่วงบทบาทของตัวแปรทางขวามือของสมการ ดังนั้นตัวแปรในช่วงแรกเป็นตัวแปรอิสระหรือตัวแปรต้น ($V_j d_j / \nu$) ตัวแปรในช่วงต่อมาก็คือพารามิเตอร์ที่จะมีการปรับเปลี่ยนในการทดลอง (d/d_j) และตัวแปรในช่วงสุดท้ายเป็นพารามิเตอร์ที่จะควบคุมให้คงที่ตลอดการทดลอง (D/d_j)

จากสมการที่ (2) ตัวแปรไร้มิติที่เกี่ยวข้องมีดังนี้

1. h/H (Vortex stretching ratio): อัตราส่วนความลึกของวงอากาศต่อความสูงของผิวน้ำที่เกิดขึ้น โดยถ้า h/H มีค่าเป็น 1 แสดงว่าวงอากาศที่เกิดขึ้นจะยึดจากผิวน้ำลงถึงรูทางออกด้านล่างและมีความสูงเท่ากับ ความสูงของน้ำ ถ้า h/H มีค่าน้อยกว่า 1 แสดงว่าวงอากาศยึดลงไม่ถึงพื้นล่างและมีความสูงน้อยกว่าความสูงของระดับน้ำ ถ้า h/H มีค่าประมาณ 0 แสดงว่าวงอากาศจะไม่ปรากฏที่เงื่อนไขนั้น

2. H/d : อัตราส่วนความสูงของระดับน้ำ ในท่อต่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของรูขาออก

3. $Re_j = V_j d_j / \nu$: ตัวเลขเรโนลด์ที่ออกจากปากเจ็ตกลมตามแนวสัมผัสทางด้านล่างของท่อทรงกระบอก โดยเมื่อความเร็วที่ออกจากปากเจ็ตมีค่าสูงจะส่งผลให้ Re_j มีค่าสูง และเนื่องจากในการทดลองนี้ d_j และ ν มีค่าคงที่ตลอดการทดลอง Re_j จึงแสดงถึงความเร็วตามแนวสัมผัสที่ออกจากปากเจ็ตด้วย

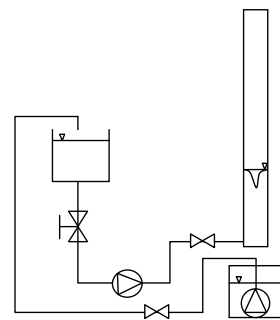
4. d/d_j : อัตราส่วนเส้นผ่านศูนย์กลางของรูทางออกต่อเส้นผ่านศูนย์กลางของเจ็ต

เมื่อพิจารณาพารามิเตอร์ที่สำคัญของการหมุนควงคืออัตราส่วนการหมุนควงเชิงความเร็ว (Swirl ratio; Sr) ซึ่งนิยามโดยอัตราส่วนความเร็วตามแนวสัมผัสกับความเร็วตามแนวแกน $Sr = V_j / V_c$ เมื่อ V_c คือความเร็วเฉลี่ยตามแนวแกนของน้ำที่ไหลออกผ่านรูทางออก และประยุกต์สมการอนุรักษ์มวลอย่างเฉลี่ยจะพบว่า $V_j / V_c = (d/d_j)^2$ ดังนั้น จึงนิยามตัวแปรใหม่คืออัตราส่วนการหมุนควงเชิงเส้นผ่านศูนย์กลาง (Diametric swirl ratio) $Sr_d = (d/d_j)^2$ และใช้ตัวแปรนี้แทน d/d_j

5. D/d_j อัตราส่วนเส้นผ่านศูนย์กลางท่อแนวตั้งต่อเส้นผ่านศูนย์กลางเจ็ต

เมื่อนำตัวแปรที่เปลี่ยนรูปแล้วมาเขียนในรูปของฟังก์ชันจะได้ดังสมการ

$$\left. \begin{matrix} h/H \\ H/d \end{matrix} \right\} = f(Re_j ; Sr_d ; D/d_j) \quad (3)$$



รูปที่ 3 ผังชุดทดลอง Bathtub vortex

จากสมการที่ (3) สำหรับการทดลองนี้จะให้ตัวแปรตามคือ h/H และ H/d ให้ Re_j เป็นตัวแปรต้น Sr_d เป็นพารามิเตอร์ที่ปรับเปลี่ยนในการทดลอง และ D/d_j เป็นพารามิเตอร์ที่ควบคุมให้คงที่ตลอดการทดลอง กล่าวคือ งานวิจัยนี้จะศึกษาผลของตัวเลขเรโนลด์ที่ออกจากปากเจ็ตต่อเงื่อนไขและลักษณะการเกิด Bathtub vortex ที่อัตราส่วนการหมุนควงเชิงเส้นผ่านศูนย์กลางมีค่าต่าง ๆ กัน และที่ D/d_j มีค่าคงที่

3. การทดลอง

ชุดอุปกรณ์การทดลองจะแสดงดังรูปที่ 3 โดยใช้ น้ำเป็นของไหล ปัมป์จะปั้มน้ำจากถังด้านบนผ่านโกล์บวาล์ว (globe valve) เพื่อปรับเปลี่ยนอัตราการไหลผ่านท่อเจ็ตที่จะฉีดเจ็ตตามแนวสัมผัสเข้าไปในท่อทรงกระบอกแนวตั้งที่ด้านล่างของท่อ น้ำในท่อทรงกระบอกแนวตั้งจะไหลออกทางด้านล่างของท่อผ่านทางรูทางออกลงสู่ถังด้านล่าง และปั้มน้ำที่ 2 จะปั้มน้ำจากถังด้านล่างเข้าสู่ถังด้านบนโดยขณะทำการทดลองวัดค่าที่เกี่ยวข้อง จะกระทำเมื่อทั้งระบบอยู่ในสภาวะคงตัว (Steady state)

ในการศึกษาจะสร้าง Bathtub vortex ให้เกิดในท่อตามแนวตั้งซึ่งในที่นี้จะใช้เป็นท่ออะคริลิกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง (D) 50 มิลลิเมตร มีความยาวตามแนวตั้ง 100 เซนติเมตร เส้นผ่านศูนย์กลางของรูขาออก (d) ปรับเปลี่ยนเป็น 3.6, 5.6 และ 8 มิลลิเมตร และท่อเจ็ตมีเส้นผ่านศูนย์กลางใน (d_j) คงที่ที่ 4

มิลลิเมตร การวัดความสูงของผิวน้ำจากด้านล่างท่ออะคริลิก (H) และความลึกของวงอากาศจากผิวน้ำ (h) จะวัดโดยใช้ไม้บรรทัดและจะใช้เทคนิคการถ่ายภาพเพื่อช่วยดูลักษณะของ Bathtub vortex ที่เกิดขึ้น

เงื่อนไขในการทดลอง

ในการทดลองนี้จะปรับเปลี่ยน Re_j โดยการปรับเปลี่ยนความเร็วของเจ็ตสัมผัสในช่วง $Re_j = 2,600 - 40,000$ และปรับเปลี่ยน Sr_d โดยการปรับเปลี่ยนขนาดรูทางออกที่ค่า $Sr_d = 0.8, 2, 4$ ซึ่งสอดคล้องกับอัตราส่วนเส้นผ่านศูนย์กลาง $d/d_j = 0.9, 1.4, 2$ ที่ D/d_j คงที่ที่ 12.5

4. ผลการทดลอง

ผลการทดลองโดยทั่วไป พบว่า เมื่ออัตราการไหลผ่านโกล์ฟวาล์วมีค่ามากขึ้นสอดคล้องกับความเร็ว V_j และ Re_j ที่ออกจากปากเจ็ตที่มากขึ้น จะทำให้ระดับน้ำในท่ออะคริลิกสูงขึ้น และจากกฎอนุรักษ์มวล จะพบว่าความเร็วตามแนวแกนก็จะมีค่ามากขึ้นด้วย จากการทดลองพบว่า เมื่อปรับเปลี่ยน Re_j จากน้อยไปมากจะเกิด Bathtub vortex 5 ลักษณะ ดังนี้

รูปแบบที่ 1: Vertically-steady, fully-stretched vortex, $h/H = 1$

เมื่อความเร็วที่ออกจากปากเจ็ตมีค่าน้อยสอดคล้องกับ Re_j ที่มีค่าน้อย พบว่าความสูงของระดับน้ำ (H และอัตราส่วน H/d) จะคงที่และต่ำ และจะเกิดวงอากาศที่ยึดตัวจากผิวน้ำลงมาสุดถึงรูทางออกที่พื้นท่อ ($h/H = 1$) ดังแสดงในรูปที่ 4 ก.

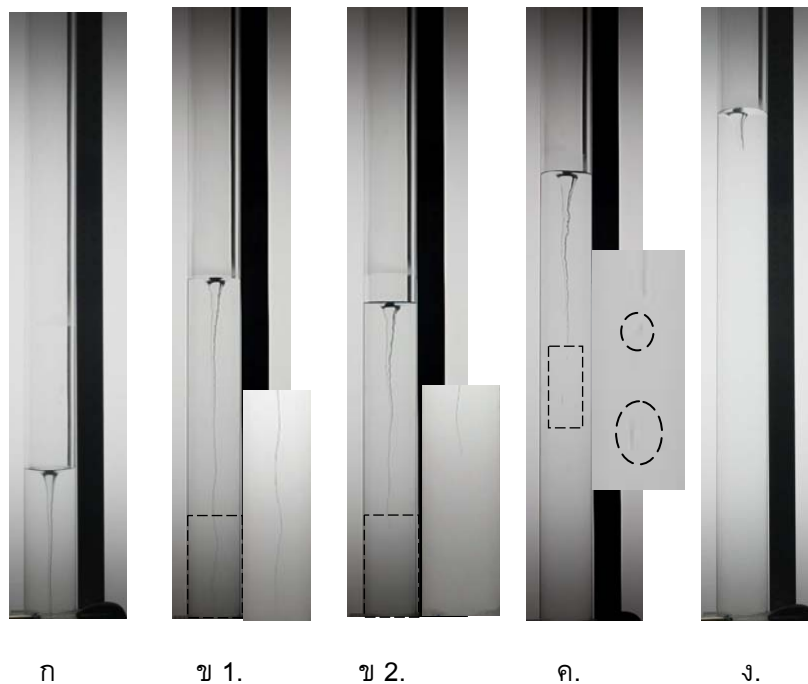
รูปแบบที่ 2: Vertically oscillating, fully/partially-stretched vortex, $0 < h/H \leq 1$

เมื่อเพิ่มความเร็วที่ออกจากปากเจ็ตซึ่งสอดคล้องกับ Re_j ที่เพิ่มขึ้น พบว่าความสูงของระดับน้ำ (H และ H/d) จะเพิ่มสูงขึ้นมากกว่าในรูปแบบที่ 1 และ

ความสูงของระดับน้ำและความยาวของวงอากาศจากผิวน้ำจะเริ่มไม่คงที่ แต่เปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นคาบ โดยเมื่อระดับน้ำเริ่มลดลง อัตราส่วนความยาวของวงอากาศ จากผิวน้ำกับความสูงของน้ำจะค่อนข้างคงที่ ($h/H < 1$ และคงที่) จนเมื่อระดับน้ำลดลงไประดับต่ำสุดวงอากาศจะยืดลงไปถึงพื้นท่อ ($h/H = 1$) เป็นระยะเวลาช่วงหนึ่ง ระดับน้ำก็จะเริ่มเพิ่มขึ้น ในขณะที่ระดับน้ำเพิ่มสูงขึ้นวงอากาศจะยังคงยืดไปสุดจนถึงพื้นท่อ จนเมื่อระดับน้ำขึ้นไปสูงสุด วงอากาศจะเริ่มหดตัวสั้นลง และระดับน้ำก็จะเริ่มลดลง เป็นอย่างนี้กลับไปกลับมาเป็นคาบ ดังแสดงในรูปที่ 4 ข 1. และ ข 2.

รูปแบบที่ 3: Vertically steady, partially stretched vortex with bubble detachment, $0 < h/H < 1$

เมื่อความเร็วที่ออกจากปากเจ็ตเพิ่มขึ้นซึ่งสอดคล้องกับ Re_j ที่เพิ่มขึ้น พบว่า ความสูงของระดับน้ำจะเพิ่มขึ้น และระดับน้ำจะเริ่มคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาใหม่คล้ายกับในรูปแบบที่ 1 แต่จะแตกต่างจากในรูปแบบที่ 1 คือปลายวงอากาศจะไม่ยืดถึงรูทางออกที่พื้นท่อ ($h/H < 1$) นอกเหนือจากนั้น จะเห็นฟองอากาศขนาดเล็กแยกตัวออกมาจากปลายวงแล้วไหลลงด้านล่างผ่านรูทางออกที่พื้นท่อดังแสดงในวงกลมในรูปที่ 4 ค. จากการทดลองพบว่า เมื่อเพิ่ม Re_j ให้สูงขึ้นจะทำให้ฟองอากาศที่แยกตัวจากปลายวงอากาศมีขนาดเล็กลงและความถี่ลดลง ซึ่งแตกต่างจาก Bermann et al. [2] ที่สร้าง Bathtub vortex ด้วยวิธีการต่างกัน และใช้เงื่อนไขของความสูงของระดับน้ำต่างกัน (H คงที่) ซึ่งสรุปไว้ว่าเมื่อเพิ่มความถี่เชิงมุมของการหมุนท่อในแนวตั้ง ฟองอากาศที่แยกตัวออกมาจากวงอากาศจะมีขนาดเล็กลงแต่จะมีความถี่เพิ่มขึ้น



รูปที่ 4 รูปร่างและลักษณะการเกิดการหมุนวนแบบวงอากาศทั้ง 5 รูปแบบ

ก.) รูปแบบที่ 1

ข 1.) รูปแบบที่ 2 ในขณะที่ระดับน้ำกำลังขึ้น วงอากาศยังคงยืดลงสุดถึงพื้นท่อ

ข 2.) รูปแบบที่ 2 ในขณะที่น้ำกำลังลดปลายวงอากาศจะเริ่มหดสั้นลงไม่ถึงพื้นท่อ

ค.) รูปแบบที่ 3 ภายในวงกลมคือฟองอากาศเล็กๆ

ง.) รูปแบบที่ 4

รูปแบบที่ 4: Vertically steady, partially stretched vortex without bubble detachment,

$$0 < h/H < 1$$

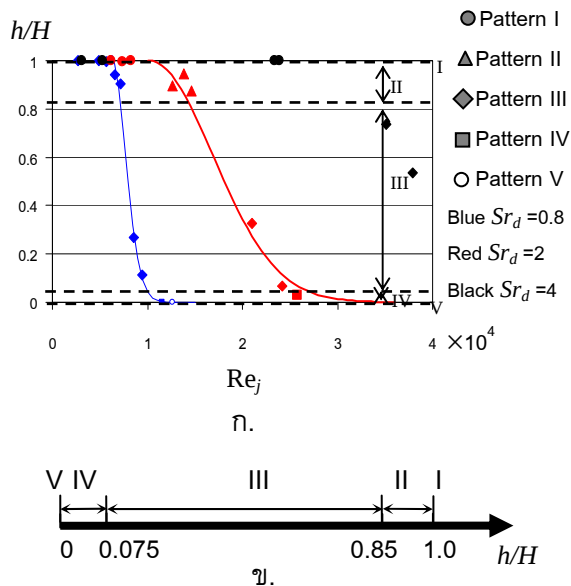
เมื่อความเร็วที่ออกจากปากเจ็ตเพิ่มขึ้นอีก ซึ่งสอดคล้องกับ Re_j ที่เพิ่มขึ้น ความสูงของระดับน้ำ (H และ H/d) จะเพิ่มขึ้น และพบว่า จะเกิด Bathtub vortex เกือบจะเหมือนในรูปแบบที่ 3 ($h/H < 1$) แต่ในรูปแบบนี้จะไม่มีการแยกตัวของฟองอากาศที่แยกตัวออกมาจากปลายวงอากาศ ดังรูปที่ 4 ง.

รูปแบบที่ 5: No bathtub vortex, $h/H \approx 0$

เมื่อเพิ่มความเร็วที่ออกจากปากเจ็ตขึ้นอีก สอดคล้องกับ Re_j ที่เพิ่มขึ้นอีก พบว่าความสูงของ

ระดับน้ำจะเพิ่มขึ้นอีก และวงอากาศจะไม่ปรากฏอีกต่อไป ($h/H = 0$)

เมื่อนำข้อมูลทั้งหมดมาพล็อตกราฟหาความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนความลึกของวงอากาศจากผิวน้ำกับความสูงของระดับน้ำ หรือ vortex stretching ratio (h/H) และตัวเลข Re_j จะได้ดังแสดงในรูปที่ 5 ก. จากกราฟ พบว่า ที่ $Sr_d = 2$ (กราฟเส้นสีแดง) ลักษณะความสัมพันธ์ของ $h/H - Re_j$ ในช่วง Re_j มีค่าสูง จะประมาณได้เป็นระฆังคว่ำ และเมื่อพิจารณากราฟของ $Sr_d = 0.8$ และ 4 จะพบลักษณะความสัมพันธ์เป็นไปในทางเดียวกัน นอกจากนี้เมื่อแบ่งช่วงรูปแบบการเกิด Bathtub vortex ตามช่วงของ h/H พบว่าทุก Sr_d ($Sr_d = 0.8, 2, 4$) จะเกิดรูปแบบ Bathtub vortex ภายในช่วง h/H ที่เหมือนกัน จึงสามารถสรุปรูปแบบการเกิด



รูปที่ 5 ก. ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนความลึกของวงอากาศกับระดับความสูงของน้ำ และตัวเลขเรโนลด์ที่ออกจากปากเจ็ต

ข. รูปแบบการเกิด Bathtub Vortex ตามช่วงของ h/H

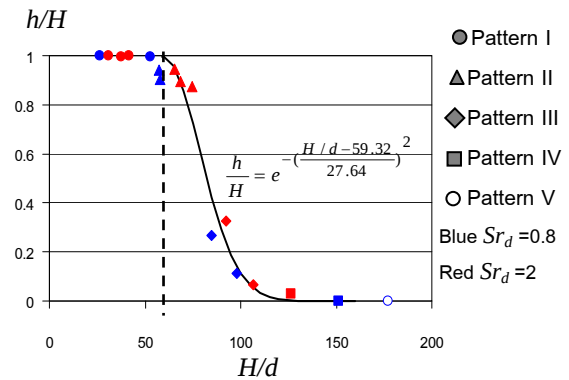
Bathtub vortex ตามช่วง h/H ของทุก Sr_d ได้ดังแสดงในรูปที่ 5 ข.

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง h/H และ H/d แสดงในรูปที่ 6 พบว่า กราฟของ Sr_d ทั้ง 3 ค่า จะประมาณว่าซ้อนทับกัน และสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $h/H - H/d$ ที่ Sr_d ต่างๆ ด้วย ความสัมพันธ์เดียว โดยที่ H/d มีค่าสูง ความสัมพันธ์ระหว่าง $h/H - H/d$ จะประมาณได้ด้วยความสัมพันธ์แบบระฆังคว่ำดังสมการ

$$\frac{h}{H} = \begin{cases} 1, & H/d < 59.32 \\ e^{-\left(\frac{H/d-59.32}{27.64}\right)^2}, & H/d > 59.32 \end{cases} \quad (4)$$

จากสมการ จะพบว่าเราสามารถนิยามจุดสำคัญได้อย่างน้อยสองจุด คือ

1. เมื่อพิจารณาที่จุดสิ้นสุดของการเกิด Bathtub vortex รูปแบบที่ 1 ซึ่งเป็นจุดสิ้นสุดของการเกิด Bathtub vortex ที่มีการยืดตัวตามแนวตั้งคงที่ (vertically steady, fully stretched vortex) หลังจากจุดนี้ไปแล้ว vortex จะเริ่มมีการหดตัว จะ



รูปที่ 6 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนความลึกของวงอากาศต่อระดับความสูงของน้ำ และอัตราส่วนความสูงน้ำต่อขนาดของรูทางออก

พบว่า จะเกิดที่ค่าอัตราส่วนความสูงของน้ำต่อเส้นผ่านศูนย์กลางของรูทางออก $H/d = 59.32$;

2. เมื่อพิจารณาที่จุดที่มี $h/H = 1/e^2 = 0.135$ ซึ่งในทางปฏิบัติในบางกรณี อาจถือประมาณว่า Bathtub vortex มีขนาดสั้นมาก อาจละทิ้งได้ จะพบว่า จะเกิดที่ $H/d = 98.5$

เมื่อกลับไปพิจารณารูปที่ 5 ก. อีกครั้ง จะพบว่า ตัวแปรไร้มิติ คือ Re_j และ Sr_d มีผลต่อการเกิด Bathtub vortex ทั้ง 2 ตัวแปร กล่าวคือ เมื่อขนาดของรูทางออกเพิ่มขึ้น (สอดคล้องกับ Sr_d เพิ่มขึ้น) จะพบว่า 1) จุดเริ่มต้นของการเกิด bathtub vortex ในรูปแบบต่างๆ จะเกิดที่ Re_j สูงขึ้น และ 2) ช่วงความกว้างของ Re_j ที่จะเกิด bathtub vortex ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งก็จะกว้างขึ้น 3) หากจะทำให้เกิด Bathtub vortex ให้ครอบคลุมทั้ง 5 รูปแบบจะต้องใช้ Re_j ที่มากขึ้น

จากข้อสังเกตข้างต้น คือ เมื่อ Sr_d เพิ่มขึ้น จุดและคุณลักษณะต่างๆของการเกิด Bathtub vortex ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง จะเกิดที่ Re_j สูงขึ้น ผู้วิจัยจึงเกิดแนวคิดว่าการเกิด Bathtub vortex รูปแบบใดรูปแบบหนึ่งจะมีความสัมพันธ์ระหว่าง Re_j และ Sr_d , และ Re_j และ Sr_d ไม่ได้เป็นอิสระต่อกัน ดังที่คาดคิดไว้ในสมการที่ (3) ดังนั้น จึงจินตนิยามตัวแปรตัวใหม่คือ α ซึ่งแทนอัตราส่วนของ Re_j ต่อ Sr_d ,

$$\alpha = \frac{Re_j}{Sr_d} \quad (5)$$

และใช้ α แทนที่ Re_j ในการพล็อตกราฟความสัมพันธ์กับ h/H ที่ Sr_d ต่างๆกัน (แทนที่รูปที่ 5) ดังแสดงในรูปที่ 7 ก

จากรูปที่ 7 ก จะเห็นได้ชัดว่า กราฟของ Sr_d ทั้ง 3 ค่า จะประมาณว่าซ้อนทับกัน และสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $h/H - \alpha$ ที่ Sr_d ต่างๆได้ด้วยความสัมพันธ์เดียว โดยที่ α มีค่าสูง ความสัมพันธ์ระหว่าง $h/H - \alpha$ จะประมาณได้ด้วยความสัมพันธ์แบบระฆังคว่ำ

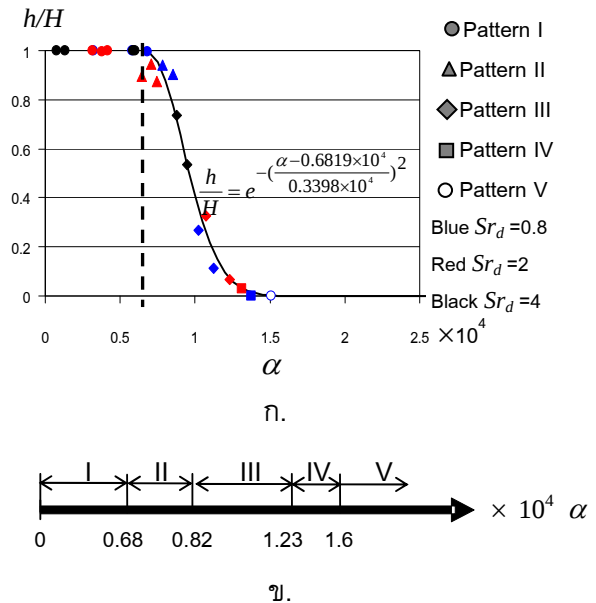
$$\frac{h}{H} = \begin{cases} 1, & \alpha < 6.8 \times 10^3 \\ e^{-\left(\frac{\alpha - 6.819 \times 10^3}{3.398 \times 10^3}\right)^2}, & \alpha \geq 6.8 \times 10^3 \end{cases} \quad (6)$$

นอกเหนือจากนั้น เมื่อนำช่วงของการแบ่ง h/H ดังที่ได้แสดงในรูปที่ 5 ข. มาพิจารณาแบ่งช่วง α ตามช่วงของรูปแบบการเกิด Bathtub vortex จะพบว่าสามารถแบ่งช่วงของ α ออกเป็น 5 ช่วง ดังแสดงสรุปในรูปที่ 7 ข.

5. สรุปผลการทดลอง

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาเงื่อนไขการเกิดและคุณลักษณะของ Bathtub vortex ที่สร้างขึ้นด้วยวิธีการฉีดเจ็ตกลมตามแนวสัมผัสที่ด้านล่างของท่อแนวตั้ง ซึ่งแตกต่างจากงานวิจัยในอดีตในสองแง่มุมหลัก คือ 1) การสร้างความเร็วตามแนวสัมผัสที่ไม่คงที่ตลอดความสูงของระดับน้ำ แต่จะรวมจุดและเข้มข้นอยู่ที่ปากทางออกของเจ็ต และ 2) ระดับความสูงของน้ำเป็นตัวแปรตาม ไม่ได้เป็นตัวแปรควบคุมที่ควบคุมให้คงที่ พบว่าการฉีดเจ็ตในลักษณะนี้จะสามารถทำให้เกิด Bathtub vortex ได้ 5 รูปแบบตามค่า Re_j ที่เพิ่มขึ้น ดังนี้

1. vertically-steady, fully-stretched vortex, $h/H = 1$
2. vertically oscillating, fully/partially-stretched vortex, $0 < h/H \leq 1$



รูปที่ 7 ก. ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนความลึกของวงอากาศกับระดับความสูงของน้ำ และ α

ข. รูปแบบการเกิด Bathtub vortex ตามช่วงของ α

3. vertically steady, partially stretched vortex with bubble detachment, $0 < h/H < 1$
4. vertically steady, partially stretched vortex without bubble detachment, $0 < h/H < 1$
5. no bathtub vortex, $h/H \approx 0$

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง vortex stretching ratio และ Re_j ($h/H - Re_j$) ในช่วงการเกิดรูปแบบที่ 2 ถึงรูปแบบที่ 4 พบว่า ความสัมพันธ์ $h/H - Re_j$ จะขึ้นอยู่กับ Sr_d ไม่เป็นความสัมพันธ์เดียวกัน แต่ความสัมพันธ์ดังกล่าวที่แต่ละ Sr_d จะมีรูปร่างคล้ายกันและสามารถประมาณได้ด้วยความสัมพันธ์ระฆังคว่ำ (half-gaussian curve) โดยจุดสูงสุด (cut-off point) ของกราฟความสัมพันธ์จะอยู่ที่จุดสิ้นสุดของการเกิดรูปแบบที่ 1 เมื่อ Sr_d เพิ่มขึ้น จุด cut-off point จะเกิดที่ Re_j ที่มากขึ้น และช่วงความกว้างของ Re_j ที่เกิด Bathtub vortex รูปแบบใดรูปแบบหนึ่งจะกว้างขึ้น ทำให้กราฟแสดงความสัมพันธ์กว้างขึ้น

อย่างไรก็ตาม เมื่อรวบตัวแปรไร้มิติ Re_j และ Sr_d เข้าด้วยกัน โดยนิยามเป็นตัวแปรใหม่ คือ $\alpha = Re_j / Sr_d$ จะพบว่ากราฟ $h/H - Re_j$ ที่ Sr_d ต่างกันจะซ้อนทับกันนำไปสู่ความสัมพันธ์ระหว่าง $h/H - \alpha$ ความสัมพันธ์เดียว ไม่ขึ้นอยู่กับทั้ง Re_j และ Sr_d ดังสมการ

$$\frac{h}{H} = \begin{cases} 1, & \alpha < 6.8 \times 10^3 \\ e^{-\left(\frac{\alpha - 6.819 \times 10^3}{3.398 \times 10^3}\right)^2}, & \alpha \geq 6.8 \times 10^3 \end{cases}$$

และพบว่า cut-off point จะเกิดที่ $\alpha = 6,800$ ในขณะที่จุด $1/e^2$ ซึ่งเป็นจุดที่ $h/H = 0.135$ จะเกิดที่ $\alpha = 11,600$

ในทำนองเดียวกัน พบว่าความสัมพันธ์ระหว่าง $h/H - H/d$ จะไม่ขึ้นอยู่กับทั้ง Re_j และ Sr_d ด้วยเช่นเดียวกัน และเป็นไปตามสมการ

$$\frac{h}{H} = \begin{cases} 1, & H/d < 59.32 \\ e^{-\left(\frac{H/d - 59.32}{27.64}\right)^2}, & H/d > 59.32 \end{cases}$$

และพบว่าจุด cut-off point และจุด $1/e^2$ จะเกิดที่ $H/d = 59.3$ และ 98.5 ตามลำดับ

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Andersen, A., Bohr, T., Stenum, B., Rasmussen, J. and Lautrup, B. 2003. Anatomy of Bathtub Vortex, *Physical Review Letters*, Vol. 91, No.10, 104502.
- [2] Bergmann, R., Andersen, A., Van der Meer, D. and Bohr, T. 2009. Bubble Pinch-Off in a Rotating Flow, *Physical Review Letters*, Vol. 102, 204501.
- [3] Ezure, T., Kimura, N., Miyakoshi, H. and Kamide, H. 2010. Experimental investigation on bubble characteristics entrained by surface vortex, *Nuclear Engineering and Design*(2010), doi:10.1016/j.nucengdes.2010.09.021.
- [4] Monji, H. and Shinozaki, T. 2010. Effect of Experimental Conditions on Gas Core Length and Downward Velocity of Free Surface Vortex in

Cylindrical Vessel, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Jan 2010, Vol. 132, pp. 012901-1 – 012901-8.