การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 17
15-17 ตุลาคม 2546 จังหวัดปราจีนบุรี

การวิเคราะห์ความเค้นในคานตรงที่ได้รับโมเมนต์ดัดด้วยวิธีมอนติคาร์โล

An Analysis of Bending Stress in Straight Beams Subjected to Pure Bending by Monte Carlo Method

ชาญวิทย์ ชัยอมฤต และ จำลอง ลิ้มตระกูล
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น
123 ถ.มิตรภาพ อ.เมือง จ.ขอนแก่น 40002
โทร. 0-4324-4296 โทรสาร 0-4324-5878 E-mail: Gearkku@hotmail.com

Chanwit CHAIAMARIT and Jumlong LIMTRAGOOL
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Khon Kaen University
123 Mittrapharb Rd. Maung Khon Kaen 40002
Tel: 0-4324-4296 Fax: 0-4324-5878 E-mail: Gearkku@hotmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาการประยุกต์ใช้วิธีมอนติคาร์โลในการวิเคราะห์ความเค้นในคานตรงที่ได้รับโมเมนต์ดัดเป็นการศึกษาวิธีการใหม่ต่องานทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง ขั้นตอนของการแก้ปัญหาด้วยวิธีมอนติคาร์โลคือ เริ่มจากการกำหนดขอบเขตของปัญหา, กำหนดจำนวนจุดต่อ, กำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขต และกำหนดจำนวนตัวเดินสุ่ม แล้วทำการวิเคราะห์ความเค้นดัดที่เกิดขึ้นเริ่มจากปล่อยตัวเดินสุ่มตรงจุดที่ต้องการ เดินสุ่มระหว่างจุดต่อที่อยู่ติดกันไปตามลำดับและไปหยุดที่ขอบเขต ความแม่นยำของคำตอบที่ได้จะขึ้นอยู่กับจำนวนตัวเดินสุ่มที่ใช้ ข้อเสียของการเพิ่มจำนวนจุดต่อให้มากขึ้นคือ จำนวนตัวเดินสุ่มต่อ 1 พิกัดจะต้องเพิ่มมากขึ้นตามไปด้วย และเมื่อเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากวิธีมอนติคาร์โลกับทฤษฎีพบว่าการทดสอบโดยใช้จำนวนตัวเดินสุ่ม 50, 100, 500, 1000, 2000 และ 5000 ครั้งต่อ 1 พิกัด ผลเฉลยที่ได้มีความคลาดเคลื่อนลดลงตามลำดับ และค่าเฉลี่ยของจำนวนตัวเดินสุ่มที่เหมาะสมที่สุดจะอยู่ที่ประมาณ 2000 ครั้งต่อ 1 พิกัด ให้ค่าความคลาดเคลื่อนประมาณ 2 เปอร์เซ็นต์

ABSTRACT

The objective of this research is to study application of Monte Carlo method to analyze stress in straight beams subjected to pure bending. This is new method in mechanics of solids area. Steps in solving problem by Monte Carlo method are: specify the boundaries of the problem, specify number of nodes, specify values of the boundaries and specify the number of random walks. Analysis of bending stress begins by start the random walk process at the desired node, walk step by step to the adjacent node in random fashion and stop at the boundary. Accuracy of the solution depends on the number of random walk used. Disadvantage to increase the numbers of node was to increase the number of random walks per a nodal coordinate too. To compare the result between Monte Carlo method and the theory by using the number of random walks 50, 100, 500, 1000, 2000 and 5000 per a nodal coordinate, the error of Monte Carlo method decreased. And the most suitable average number of random walks per a nodal coordinate was about 2000 with an error of about 2%.

1. บทนำ

การหาผลเฉลยของปัญหาทางคณิตศาสตร์แบ่งออกได้เป็น 2 วิธีคือการหาผลเฉลยเชิงทฤษฎี และการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ปัญหาที่สามารถหาผลเฉลยเชิงทฤษฎีได้ส่วนใหญ่จะเป็น

ปัญหาที่ไม่ซับซ้อน แต่เมื่อปัญหามีความซับซ้อนขึ้น การหาผลเฉลยเชิงทฤษฎีก็ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ ดังนั้นวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขจึงได้ถูกคิดค้นขึ้นมา

วิธีมอนติคาร์โลก็เป็นวิธีหนึ่งในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยมีแนวคิดคือ สร้างแบบจำลองเชิงเฟ้นสุ่มให้สอดคล้องเข้ากันกับปัญหาเชิงกำหนด(deterministic problems) จากนั้นก็สร้างจำนวนสุ่มขึ้นมา ทำการเดินเป็นจำนวนมากๆครั้ง แล้วบันทึกผลลัพธ์เอาไว้ สุดท้ายนำข้อมูลที่บันทึกไว้ไปแทนค่าในสมการของแบบจำลองเชิงเฟ้นสุ่ม ก็จะได้ผลเฉลยตามต้องการ[4] ความเค้นดัดในคานตรงในงานวิจัยนี้หาได้จากค่าอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันความเค้น นั่นคือการหาผลเฉลยของสมการลาปลาส

2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ฟังก์ชันความเค้น

สมการขององค์ประกอบความเค้นซึ่งอยู่ในรูปของฟังก์ชันความเค้นของแอรี(Airy Stress Function)[1]

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2},\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \qquad (1)$$

โดยที่ฟังก์ชันความเค้นหาได้จากสมการไบฮาร์โมนิค (Biharmonic)[1]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \qquad (2)$$

นำฟังก์ชันความเค้นของแอรีแทนลงในสมการไบฮาร์โมนิคและจัดรูปใหม่โดยที่จะพิจารณาเฉพาะความเค้นที่เกิดขึ้นในแนวแกน x สมการที่ได้จะลดรูปเหลือเพียง

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \qquad (3)$$

2.2 สมการลาปลาส

วิธีมอนติคาร์โลเป็นวิธีที่นำมาใช้แก้ปัญหาสมการลาปลาสได้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังนั้นจะต้องทำการแปลงสมการที่ (3) ให้อยู่ในรูปของสมการลาปลาส โดยกำหนดให้มีฟังก์ชัน ϕ_1 และ ϕ_2 ขึ้นมาดังนี้

กำหนดให้ $\phi = \phi_2 + \frac{y^3(Ek)}{6}$ และ $\phi_1 = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2}$

จัดให้อยู่ในรูปสมการที่ต้องการ จะได้

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0$$

2.3 วิธีผลต่างสืบเนื่อง[6]

วิธีผลต่างสืบเนื่องจะนำมาประยุกต์ใช้กับ ค่าฟังก์ชันความเค้นลัพธ์ที่ได้จากการเดินสุ่มได้โดยมีลักษณะการหาค่าความเค้นอยู่ 2 แบบคือ การประมาณค่าความเค้นที่จุดต่อบนขอบเขต(บน-ล่าง) และการประมาณค่าความเค้นที่จุดต่อภายใน

2.3.1 การประมาณค่าความเค้นที่จุดต่อขอบเขตด้านบน

การประมาณค่าความเค้นที่จุดต่อขอบเขตด้านบนใช้วิธีผลต่างย้อนหลัง (Backward Difference) ซึ่งมีสมการของการคำนวณดังนี้

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{2\phi_{i,j} - 5\phi_{i,j-1} + 4\phi_{i,j-2} - \phi_{i,j-3}}{(\Delta y)^2} \qquad (4)$$

2.3.2 การประมาณความเค้นที่จุดต่อขอบเขตด้านล่าง

การประมาณค่าความเค้นที่จุดต่อขอบเขตด้านล่างใช้วิธีผลต่างไปข้างหน้า (Forward Difference) ซึ่งมีสมการของการคำนวณดังนี้

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{2\phi_{i,j} - 5\phi_{i,j+1} + 4\phi_{i,j+2} - \phi_{i,j+3}}{(\Delta y)^2} \qquad (5)$$

2.3.3 การประมาณค่าความเค้นที่จุดต่อภายใน

การประมาณค่าความเค้นที่จุดต่อภายในจะใช้วิธีผลต่างกลาง (Central Difference) ซึ่งมีสมการของการคำนวณดังนี้

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \qquad (6)$$

โดยที่ Δy คือ ระยะระหว่างจุดต่อที่ติดกันในทิศ y

3. ขั้นตอนของวิธีมอนติคาร์โลกับปัญหาการดัดคานตรง

การคำนวณค่าความเค้นดัดในคานตรงที่ได้ทำการวิจัยนี้มีผลลัพธ์อยู่ในลักษณะของผลเฉลยเชิงตัวเลข สามารถแบ่งขั้นตอนออกเป็น 3 ขั้นตอนหลักดังนี้

3.1 กำหนดรูปร่างปัญหา

สร้างแบบจำลองของคานโดยสร้างเป็นตะแกรงขึ้นและแสดงผลในรูปพิกัดจุดต่อดังนี้

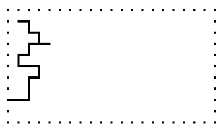
รูปที่ 1 ลักษณะการกำหนดจุดต่อ

3.2 กำหนดเงื่อนไขขอบเขต

การกำหนดเงื่อนไขขอบจะถูกกำหนดโดยสมการที่นำมาช่วยในการแปลงสมการให้เป็นสมการลาปลาสนั่นคือ ใช้ค่า $\frac{y^3}{6}$ มาเป็นค่าที่เงื่อนไขขอบเขต

3.3 การเดินสุ่ม

กระบวนการสุ่มที่ใช้ในวิธีมอนติคาร์โลสำหรับการหาผลเฉลยของสมการลาปลาสนี้คือการเดินสุ่ม ซึ่งการเดินสุ่มจะต้องเดินจากจุดต่อจุดหนึ่งไปยังจุดต่อข้างเคียงที่อยู่โดยรอบเท่านั้น และมีเงื่อนไขการเดินสุ่มคือ การเดินจะต้องเกิดขึ้นที่จุดต่อภายในขอบเขตและจะหยุดเดินก็ต่อเมื่อเดินไปอยู่ที่ขอบเขตดังตัวอย่างในรูปที่ 2

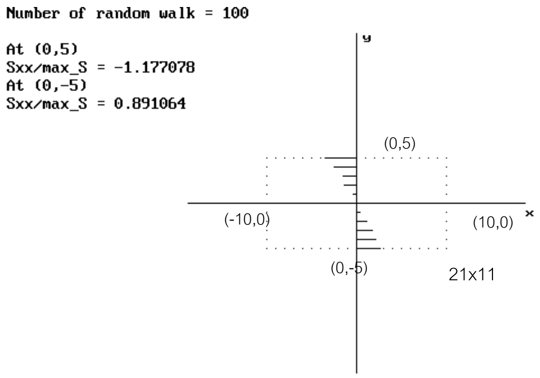


รูปที่ 2 ตัวอย่างลักษณะการเดินจากจุดปล่อยจนกระทั่งหยุด โดยปล่อยตัวเดินเพียง 1 ตัว

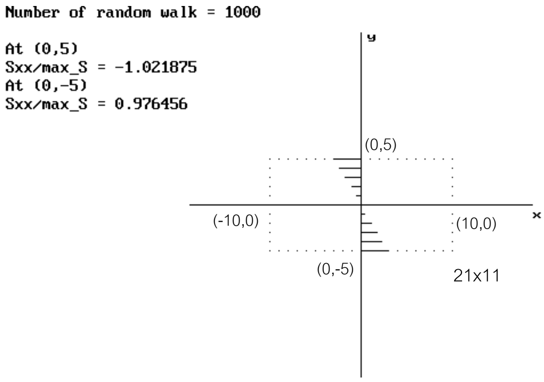
ในขั้นตอนการเดินนี้จะสามารถทำการคำนวณค่าฟังก์ชันความเค้นลัพธ์ไปพร้อมกันได้ ซึ่งค่าฟังก์ชันความเค้นลัพธ์นี้จะมาจากการรวมการคำนวณ 2 ส่วนเข้าด้วยกัน คือ ส่วนที่ 1 มาจากการคำนวณค่าฟังก์ชันความเค้นจากการเดินสุ่มหาผลเฉลย และส่วนที่ 2 มาจากการคำนวณค่าฟังก์ชันความเค้นโดยตรง โดยที่จะรวมกันเฉพาะตรงตำแหน่งที่ตรงกันเท่านั้น เมื่อได้ค่าฟังก์ชันความเค้นลัพธ์แล้วก็จะนำวิธีผลต่างสืบเนื่องมาประยุกต์ใช้

4. ผลการทดสอบ

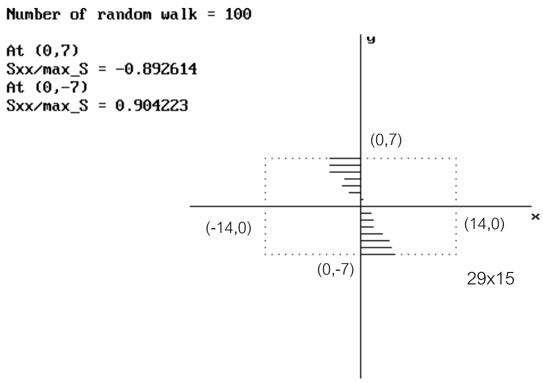
เมื่อสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้คำนวณค่าความเค้นในคานตรงเสร็จแล้วก็จะต้องทำการทดสอบโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลยของวิธีมอนติคาร์โล ซึ่งได้ทำการทดสอบที่ระยะการแบ่งความสูงเป็น 9, 11, 13, 15 และ 17 จุดต่อ ทำการทดสอบจำนวนครั้งของการเดินสุ่มต่อพิกัดที่ต่างๆกันออกไปเป็น 50, 100, 500, 1000 และ 2000 ครั้งต่อ 1 พิกัด ซึ่งได้นำผลการทดสอบบางส่วนมาแสดงดังนี้



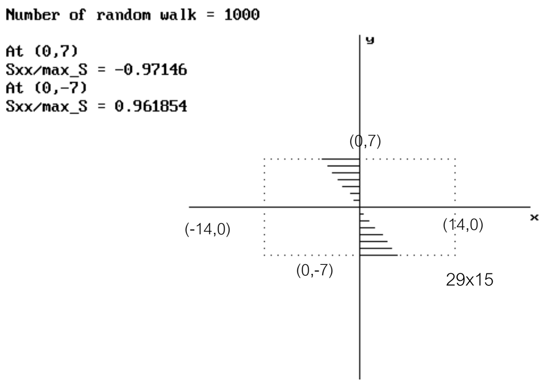
รูปที่ 3 การกระจายของความเค้นดัดของระยะความสูง 11 จุดต่อที่เกิดจากการเดินสุ่ม จำนวน 100 ครั้งต่อ 1 พิกัด



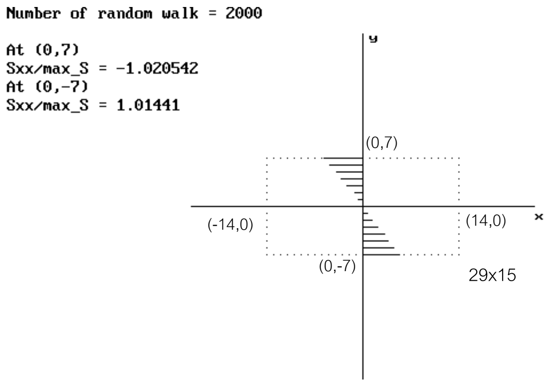
รูปที่ 4 การกระจายของความเค้นดัดของระยะความสูง 11 จุดต่อที่เกิดจากการเดินสุ่มจำนวน 1000 ครั้งต่อ 1 พิกัด



รูปที่ 5 การกระจายของความเค้นดัดของระยะความสูง 15 จุดต่อที่เกิดจากการเดินสุ่มจำนวน 100 ครั้งต่อ 1 พิกัด



รูปที่ 6 การกระจายของความเค้นดัดของระยะความสูง 15 จุดต่อที่เกิดจากการเดินสุ่มจำนวน 1000 ครั้งต่อ 1 พิกัด



รูปที่ 7 การกระจายของความเค้นดัดของระยะความสูง 15 จุดต่อที่เกิดจากการเดินสุ่มจำนวน 2000 ครั้งต่อ 1 พิกัด

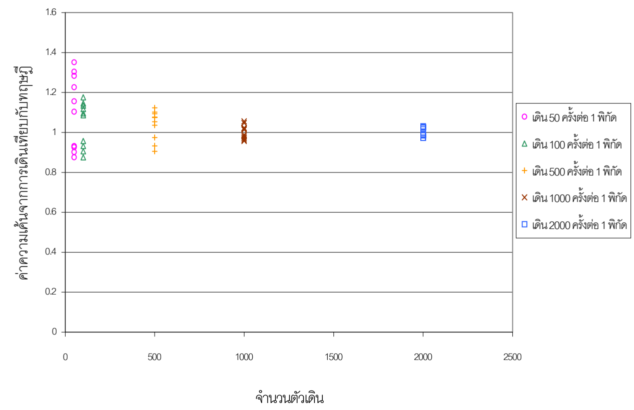
ทำการทดสอบโปรแกรมโดยเปลี่ยนจำนวนตัวเดินให้แตกต่างกันออกไป พิจารณาทำการทดสอบโดยเปลี่ยนจำนวนตัวเดินสุ่มได้แก่ 50, 100, 500, 1000 และ 2000 ครั้งต่อ 1 พิกัด ตามลำดับ ซึ่งในแต่ละจำนวนสุ่มที่ใช้จะทำการทดสอบทั้งหมด 10 รอบการทดสอบ บันทึกผลลงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ค่าความคลาดเคลื่อนที่พิกัด(0,7) ทำการทดสอบ 10 รอบการคำนวณ

จำนวนตัวเดิน (ครั้งต่อพิกัด) / จำนวนการทดสอบ(ครั้ง)	50	100	500	1000	2000
1	0.90201	0.87546	1.05368	0.98054	1.02524
2	1.30448	1.09637	0.97421	0.96457	1.02863
3	0.93166	1.14524	1.07518	0.98911	1.03128
4	1.10457	1.11772	1.07699	0.97223	1.02457
5	1.35125	1.17646	0.93358	1.01926	0.97336
6	1.22674	1.13416	0.90568	0.95692	0.99128
7	0.92624	1.08621	1.03665	1.01428	1.01612
8	0.87495	0.95765	1.10215	1.02351	0.98633
9	1.28312	0.9056	1.09448	1.04762	0.97327
10	1.15579	0.93247	1.12306	1.05528	0.98542

จากตารางที่ 1 เป็นการพิจารณา ณ ตำแหน่งพิกัด (0,7) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เกิดค่าความเค้นสูงสุด โดยได้ทำการเปรียบเทียบค่าความเค้นจากการเดินสุ่มเทียบกับค่าความเค้นมากที่สุดทางทฤษฎี ค่าที่ได้ออกมานี้จะอยู่ในรูปตัวเลขทศนิยม โดยที่ตัวเลข 1.0 จะมีค่าความแม่นยำเท่ากับ 100 เปอร์เซ็นต์ หรือมีค่าความคลาดเคลื่อน 0.0 เปอร์เซ็นต์ เช่น จากตารางที่ 1 การทดสอบครั้งที่ 1 ของจำนวนตัวเดินสุ่ม 100 ครั้งต่อ 1 พิกัดได้ผลเป็น 0.87546 นั่นคือ มีค่าความคลาดเคลื่อนเป็น (0.87546-1.0)x100% เท่ากับ -12.454 เปอร์เซ็นต์ ส่วนในการทดสอบครั้งที่ 1 ของจำนวนตัวเดินสุ่ม 1000 ครั้งต่อ 1 พิกัดได้ผลเป็น 0.98054 ก็แสดงว่า มีค่าความคลาดเคลื่อนเป็น (0.98054-1.0)x100% เท่ากับ -1.946 เปอร์เซ็นต์ ในทำนองเดียวกันค่าความคลาดเคลื่อนที่อื่นๆก็สามารถพิจารณาได้ในลักษณะเดียวกัน

เมื่อได้ผลการทดสอบครบ 10 รอบการคำนวณแล้ว ก็จะนำผลที่ได้ในตารางที่ 1 มาลองพลอตกราฟเปรียบเทียบค่าที่ได้จากการเดินสุ่มเทียบกับทฤษฎีกับจำนวนตัวเดิน ดังในรูปที่ 8 โดยมีแกน x เป็นจำนวนตัวเดิน และแกน y เป็นค่าความเค้นจากการเดินเทียบกับทฤษฎี(ค่าความคลาดเคลื่อน) ซึ่งจะเห็นได้ว่า เมื่อจำนวนตัวเดินสุ่มเพิ่มขึ้นทำให้ช่วงของการกระจายตัวของความผิดพลาดค่อยๆลดลง



รูปที่ 8 การเปรียบเทียบจำนวนตัวเดินกับค่าที่ได้จากการเดินเทียบกับทฤษฎีของตารางที่ 1

จากการทดสอบ การกำหนดจำนวนตัวเดิน 50 ครั้งต่อ 1 พิกัด จะให้ค่าความแม่นยำน้อยที่สุดหรือมีค่าความคลาดเคลื่อนสูงที่สุด จากรูปที่ 8 ที่จำนวนตัวเดินสุ่ม 50 ครั้งต่อพิกัดให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีลักษณะกระจายตัวห่างกัน แต่เมื่อเพิ่มจำนวนตัวเดินเป็น 100, 500, 1000 และ 2000 ครั้งต่อ 1 พิกัด พบว่า ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงเรื่อยๆโดยมีลักษณะเกาะ

กลุ่มกันใกล้ค่า 1 (อัตราส่วนที่มีความแม่นยำ 100 เปอร์เซ็นต์) เมื่อเปรียบเทียบเฉพาะรูปที่ 4 กับรูปที่ 6 โดยใช้จำนวนตัวเดินสุ่มเท่ากัน แต่มีระยะของการแบ่งจุดต่อที่ไม่เท่ากัน พบว่าเมื่อเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนของรูปที่ 6 จะมีเปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนสูงกว่า ซึ่งเป็นเพราะว่าการกำหนดจำนวนตัวเดินสุ่มมีจำนวนน้อยเกินไปไม่เหมาะสมกับขนาดของจุดต่อที่มีจำนวนมากขึ้น แต่อย่างไรก็ตามเมื่อเพิ่มจำนวนตัวเดินสุ่มให้มากขึ้น เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนจะค่อยๆลดลงตามลำดับ

5. สรุป

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอการประยุกต์ใช้วิธีมอนติคาร์โลกับปัญหาการดัดคานตรงที่ได้รับโมเมนต์ดัด ซึ่งมีขั้นตอนการหาผลเฉลย คือ กำหนดขอบเขตของปัญหา จำนวนจุดต่อ ค่าเงื่อนไขขอบเขต และจำนวนตัวเดินสุ่มที่ใช้ ทำการวิเคราะห์โดยปล่อยตัวเดินสุ่มที่จุดต่อภายในเพื่อหาฟังก์ชันความเค้นจากการเดินสุ่ม ณ จุดที่ปล่อย จากนั้นก็จะนำวิธีผลต่างสืบเนื่องมาประยุกต์ใช้โดยคำนวณที่จุดต่อที่ต้องการเพื่อหาค่าความเค้น แล้วทำการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากวิธีนี้กับทางทฤษฎี พบว่าการแบ่งจุดต่อให้ละเอียดขึ้นพร้อมกับใช้จำนวนตัวเดินสุ่มจำนวนมากพอ จะทำให้ได้ค่าความแม่นยำของการทดสอบดีขึ้น

6. เอกสารอ้างอิง

[1] Ugural,A.C.,and S.K. Fenster,"Advanced Strength and Applied Elasticity",Elsevier Science Publishing Co.,Inc.,New York,1987.

[2] Timoshenko,S.P.,and J.N. Goodier, “Theory of Elasticity”,McGraw-Hill Book Company, Tokyo, 1970.

[3] Rubinstein,R.Y.,“Simulation and Monte Carlo Method”,John Wiley and Sons,New York, 1981.

[4] รศ.ดร.ศิริศักดิ์ หาญชูวงศ์,รายงานการวิจัย เรื่อง“การวิเคราะห์ความเค้นเฉือนในเพลาตรงภาคตัดไม่กลมที่อยู่ภายใต้แรงบิดโดยวิธีมอนติคาร์โล”,ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ,1999.

[5] Miller,I.,and J.E. Freund,“Probability and Statistics for Engineers”,Prentice-Hall,New Delhi,1981.

[6] Gerald,C.F.,and P.O. Wheathley,“Applied Numerical Analysis”,Addison-wesley Publishing Company, California,1984.

[7] Enrico Volterra, and J.H. Gaines, “Advanced Strength of Materials” ,Prentice-Hall, Inc.,Englewood Cliffs,N.J.,1971.