

การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานสูงสุดกับการใช้ความหยาบกระด้างสูงสุด ของลิฟต์ความเร็วสูงโดยให้จุดสิ้นสุดทั้งสองค่าของตัวแปรควบคุมในระบบพลศาสตร์

The Comparison of Using Maximum Energy and Maximum Jerk With given both end of Control Input in Dynamic System Application in High Speed Elevator

ทวิวัชร วีระแก้ว¹ สมมาตร ศรีประเทือง²

¹กองวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ส่วนการศึกษาโรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า จ. นครนายก 26001

โทร 0-37393487 โทรสาร 0-37393487 E-mail: tawiwat@hotmail.com

²ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ จ.นครนายก 26120

โทร 084-0121577 E-mail: sripratuang30@hotmail.com

บทคัดย่อ

บทความวิชาการนี้เป็นการนำเสนอปัญหาการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ของลิฟต์ขนส่งในรูปแบบของความต้องการความนุ่มนวลตลอดการทำงาน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วในการกำหนดฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์นั้น จะนิยมใช้เทอมของ พลังงาน เวลา ความเร็ว และระยะขจัด แต่ในบทความวิชาการหรืองานวิจัยชิ้นนี้จะเน้นเป็นพิเศษที่ความนุ่มนวลของระบบลิฟต์ขนส่งเนื่องจากเป็นที่ทราบกันดีว่าในการทำงานของระบบพลศาสตร์โดยเฉพาะระบบลิฟต์ขนส่งนั้น ความนุ่มนวลเป็นที่ต้องการความนุ่มนวลในการเคลื่อน ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจในปัญหานี้และต้องการศึกษาผลลัพธ์ที่ได้เพื่อนำไปเปรียบเทียบกับการใช้พลังงานน้อยที่สุด จากการวิจัยพอสรุปได้ว่าคำตอบที่ได้มีความใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อยที่สุดเป็นฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุด ซึ่งจะมีผลดีในการวิเคราะห์ทางตัวเลขและนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้งานได้อย่างเหมาะสม กล่าวคือ ได้ทั้งความนุ่มนวลและการประหยัดพลังงาน

Abstract

This paper deals with the problem of finding the extremal solutions of the elevator systems in term of minimum jerk. In general, energy, time, velocity and displacement are used as an objective function; however, this paper is emphasizing the minimum jerk instead. Not only the minimum jerk is become an objective of this work, but also the results are used to compare with the minimum energy problem. After comparison, the conclusion is that both results from the minimum jerk and energy are quite similar when the total energy consumptions are compared.

Keywords

1. Minimum Jerk
2. Minimum Energy
3. Dynamic Optimization
4. Calculus of Variations

1. บทนำ

ในรูปแบบปัญหาของระบบการเคลื่อนที่โดยทั่วไป โดยเฉพาะการเคลื่อนที่ขึ้นลงของลิฟต์ขนส่งที่ผู้วิจัยมีความสนใจ จะประกอบไปด้วยหลายส่วน เช่น สมการการเคลื่อนที่ของลิฟต์ขนส่ง เงื่อนไขของค่าเริ่มต้น (Initial Conditions) เงื่อนไขที่เป็นขอบเขต (Boundary Conditions) หรือ เงื่อนไขที่เป็นขอบเขตสองตำแหน่ง (Two-Point Boundary Value Conditions) โดยเฉพาะในกรณีของเงื่อนไขที่เป็นขอบเขตสองตำแหน่งนั้น มีการนำเสนอในหลายรูปแบบด้วยกันแต่เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่า คำตอบของปัญหาดังกล่าวมีได้มากกว่าหนึ่งคำตอบ ตัวอย่างเช่นการเดินทางจากจังหวัดหนึ่งไปอีกจังหวัดหนึ่งนั้นมีด้วยกันมากมายหลายเส้นทาง ทำให้มีการเลือกหาเส้นทางที่มีความเหมาะสมที่สุดทั้งนี้ขึ้นอยู่กับ ผู้ที่ตั้งปัญหานั้นว่าจะสนใจในเรื่องใดหรือความประสงค์ใดเป็นหลัก เช่น เส้นทางที่สั้นที่สุด เส้นทางที่ประหยัดพลังงานมากที่สุด เป็นต้น จากปัญหาดังกล่าวในทางทฤษฎี ก็คือปัญหาของการหาค่าความเหมาะสมสูงสุด (Optimization Problems) นั่นเอง หนึ่งในวัตถุประสงค์ทั้งหลายนั้น นักวิจัยส่วนมากได้ให้ความสนใจในเรื่องของ การใช้พลังงานน้อยที่สุด และนักวิจัยอีกหลายท่านก็ได้ให้ความสนใจในเรื่อง ของความนุ่มนวลของระบบ แต่จากการค้นคว้าก็ยังไม่มีความรู้ใดทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้ระหว่าง วัตถุประสงค์ทั้งสองอย่างนี้ ที่ผู้วิจัย

มีความเห็นว่า น่าจะมีความสอดคล้องกันในผลลัพธ์ที่ได้และน่าจะมีความสอดคล้องในการพิจารณาเลือกใช้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ทั้งสองนี้

2. รูปแบบข้อกำหนดของปัญหา (Problem Statement)

ในระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear) และไม่เชิงเส้น (Nonlinear) นั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้ดังนี้

$$\dot{x} = f(x, u, t); \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

โดยที่ $x \in R^n$, $u \in R^m$ เป็นตัวแปรที่เรียกว่า States และ control ตามลำดับ x_0 คือค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของตัวแปร States t_0 คือเวลาเริ่มต้นและ $f(x, u, t)$ เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของ States Control และ เวลา รูปแบบของปัญหาในที่นี้คือการหาค่าของ Control input $u(t)$ และ ตัวแปร State $x(t)$ ที่ทำให้วัตถุประสงค์ที่ต้องการพลังงานน้อยที่สุดหรือความนุ่มนวลสูงสุดเป็นจริง และสุดท้ายก็คือนำระบบไปสู่จุดหมายปลายทางที่

$$x(t_f) = x_f. \quad (2)$$

โดยที่ t_f คือเวลา ณ ที่จุดสุดท้ายที่พิจารณา

2.1 ปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems)

ในปัญหานี้ ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดอยู่ในรูปดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum u_i^2 dt, \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

2.2 ปัญหาของความนุ่มนวลสูงสุด (Minimum Jerk Problems)

ในรูปแบบที่คล้ายกันกับปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดนั้น ปัญหาของความนุ่มนวลสูงสุดได้มีข้อแตกต่างดังนี้ เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของแรงที่เทียบกับเวลา (Jerk) คือ ตัวแปรที่เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ u ดังนั้น jerk สามารถถูกเขียนในรูปของตัวแปรใหม่ได้ดังนี้ กำหนดให้

$$u = \bar{x} \quad (4)$$

จากสมการที่ (1) จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\dot{x} = f(x, \bar{x}, t) \quad (5)$$

รวมบทความวิชาการ เล่มที่ 1 การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 22

โดยที่

$$\bar{x} = \tilde{u} \quad (6)$$

\bar{x} และ $\tilde{u} \in R^m$ เมื่อเปรียบเทียบตัวแปรกับปัญหา การใช้พลังงานน้อยที่สุดแล้ว \bar{x} ก็คือ ตัวแปรควบคุม (Control Variable) ดังสมการที่ (4) นั้นเอง แต่ \tilde{u} ในที่นี้ก็คือ ความนุ่มนวล (jerk) ทำให้ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดของปัญหาความนุ่มนวลสูงสุดอยู่ในรูปของ

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum \tilde{u}_i^2 dt, \quad i = 1, \dots, m \quad (7)$$

3. เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary Conditions)

โดยการศึกษาในงานวิจัยนี้ใช้หลักการของแคลคูลัสความแปรปรวนหาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุด ซึ่งเป็นวิธีอ้อมของปัญหาทางการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมในระบบทางพลศาสตร์ ขึ้นกับการตั้งสมมุติฐานเกี่ยวกับสมรรถนะเงื่อนไขจำกัดทางกายภาพหรือปลายทางของระยะทางการทำงาน ให้ฟังก์ชันนอล (Functional; $J[x]$) เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน ซึ่งสมการที่สามารถครอบคลุมปัญหาทั้งหมดคือ

$$J = \Phi(t, x_L, \dots, x_u)_{t_f} + \int_{L_0}^{L_1} L(t, x_1, \dots, x_u, u_1, \dots, u_m) dt \quad (8)$$

แต่ถ้าพิจารณาข้อฟังก์ชันนอลที่ค่าพลังงานของระบบที่น้อยที่สุด (Minimum energy) จะเหลือรูปสมการเพียง

$$J' = \int_{t_0}^{t_f} \left(L' + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) \right) dt \quad (9)$$

การเลือกใช้เงื่อนไขใดนั้นขึ้นอยู่กับปัญหาที่ต้องการพิจารณา โดยฟังก์ชันนอล $J[x]$ ในการศึกษาที่ใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed end time and end points) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่กำหนดเวลาเริ่มต้น (t_0) เวลาสุดท้าย (t_f) รวมทั้งค่าของฟังก์ชัน $x(t_0), x(t_f)$ ไว้แล้ว ความสามารถในการแบ่งแยกกันของฟังก์ชัน (Differentiable functions) เป็นไปตามสภาวะขอบเขตของ $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ โดยเวลาที่ใช้จะอยู่ระหว่าง $t_0 \leq t \leq t_f$ ให้ฟังก์ชัน $F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ แสดงเป็นฟังก์ชันนอลได้ว่า

$$J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (10)$$

ถ้าให้ $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_i(t_0)$ แต่ยังคงอยู่ในเงื่อนไขขอบเขต ทำให้ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงในฟังก์ชันนอล ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) - F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \quad (11)$$

และเมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) กระจายสมการ และตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป (Higher order terms) ทั้ง จะได้ว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad (12)$$

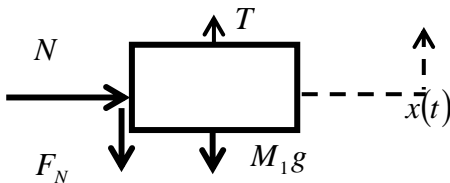
ซึ่ง δJ เป็นการประมาณค่าของ ΔJ เมื่อตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป และเมื่ออินทิเกรตเทอมที่สองด้วยวิธีอินทิเกรตพาร์ต (by part) จะได้ว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \quad (13)$$

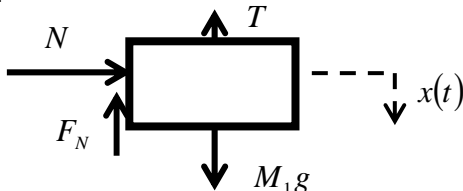
ส่วนเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุดของค่าเหมาะสมสูงสุดเป็นค่าที่ทำให้ $\delta J = 0$ คือการทำให้ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ดังนั้นจึงสมมติให้เป็นอนุพันธ์ต่อเนื่อง (Continuous derivatives) ทำให้ได้ค่าเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \dot{x}_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \ddot{x}_1} \right) - \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{\partial u}{\partial \overset{\cdot\cdot\cdot}{x}_1} \right) = 0 \quad (14)$$

5. ระบบพลศาสตร์ของลิฟต์ขึ้นลง



รูปที่ 1 ก. ระบบพลศาสตร์ของลิฟต์ขึ้นลง (เคลื่อนที่ขึ้น)



รูปที่ 1 ข. ระบบพลศาสตร์ของลิฟต์ขึ้นลง (เคลื่อนที่ลง)

จากรูปที่ 1 ก. กำหนดให้ $m_1 = 1200 \text{ kg}$ และ $F_n = 50 \text{ N}$ จะได้สมการการเคลื่อนที่ของระบบอยู่ในรูป

$$M_1 \ddot{x}_1 + M_1 g - F_n - T = 0 \quad (15)$$

หรือ

$$-M_1 \ddot{x}_1 + M_1 g - F_n - T = 0$$

เราสามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการที่ (1) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{u_1}{1,200} + \frac{F_n}{1,200} - 9.81 \end{aligned} \quad (16)$$

หรือ

$$\dot{x}_2 = -\frac{u_1}{1,200} + \frac{F_n}{1,200} - 9.81 \quad (17)$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0, \dot{x}_1(0) = 0, \ddot{x}_1(0) = 0, x_1(2) = 4 \\ \dot{x}_1(2) &= 0 \text{ และ } \ddot{x}_1(4) = 0 \end{aligned}$$

4.1 ปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems)

ในปัญหานี้ ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดอยู่ในรูป ดังนี้

$$J = \int_0^1 u_1^2 dt \quad (18)$$

จากการใช้แคลคูลัสความแปรปรวน

$$F = u_1^2 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(u_1 - \dot{x}_2) \quad (19)$$

ทำให้เงื่อนไขที่จำเป็นจากสมการที่ (14) มีดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ u_1 &= -\frac{\lambda_2}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

4.2 ปัญหาของความหิวหนวลสูงสุด (Minimum Jerk Problems)

ในปัญหานี้ สมการที่ (16) จำเป็นที่จะต้องเขียนใหม่ให้มี เทอมของ jerk อยู่ด้วยในระบบดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \tilde{u}_1 \end{aligned} \quad (21)$$

และยังคงกำหนดให้ $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_1(1) = 1$ และ $x_2(1) = 0$ เช่นเดียวกับปัญหาของการใช้พลังงานน้อยที่สุด ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดอยู่ในรูป ดังนี้

$$J = \int_0^1 \tilde{u}_1^2 dt = \int_0^1 \ddot{x}_1^2 dt \quad (22)$$

จากการใช้แคลคูลัสความแปรปรวน (Calculus of Variation)

$$F = \tilde{u}_1^2 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(x_3 - \dot{x}_2) + \lambda_3(\pm \tilde{u}_1 - \dot{x}_3) \quad (23)$$

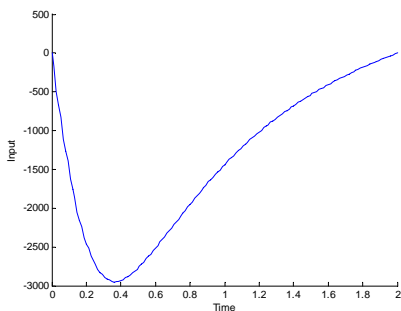
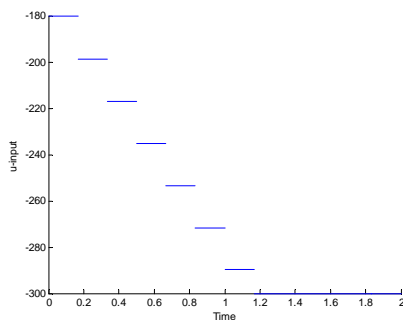
และ

$$F = u_1^2 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2\left(-\frac{u_1}{1,200} + \frac{F_n}{1,200} - 9.81 - \dot{x}_2\right) \quad (24)$$

ทำให้เงื่อนไขที่จำเป็นจากสมการที่ (14) มีดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0, \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \dot{\lambda}_3 = -\lambda_2 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 = \frac{\pm u_1}{1,200} + \frac{F_n}{1,200} - 9.81 \\ \dot{x}_3 &= \tilde{u}_1, \\ \tilde{u}_1 &= -\lambda_3/2 \end{aligned} \quad (25)$$

6. ผลลัพธ์จากระเบียบวิธีทางตัวเลข (Numerical Results)



รูปที่ 2 เปรียบเทียบ $u_1(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหา

ในปัญหาของความโน้มถ่วงสูงสุดนั้น เราไม่สามารถหาคำตอบได้ในรูปแบบของสมการเชิงเส้นเนื่องจาก เงื่อนไขขอบเขตไม่เพียงพอ ดังนั้นในงานวิจัยนี้ ได้นำระเบียบวิธีการทางตัวเลขที่มีชื่อเรียกว่า Linear Programming ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการทางตัวเลขที่ใช้ในการหา ค่าความเหมาะสมสูงสุดมาใช้ในการหาคำตอบที่ต้องการของ $x_3(t)$ ซึ่งหมายความว่า $u_1(t)$ ในปัญหาของการใช้พลังงานน้อยที่สุด ดังจะเห็นได้จากสมการที่ (20)

เมื่อนำผลลัพธ์ที่ได้เฉพาะ แรงที่กระทำต่อระบบพลศาสตร์นี้มาเขียนกราฟด้วยกันแล้วจะเห็นว่า แรง $u_1(t)$ ที่ได้จากทั้งสอง

ปัญหามีความใกล้เคียงกันมากเนื่องจากค่าของ $J = \int_0^1 u_1^2 dt$

ของปัญหาที่พิจารณาการใช้พลังงานน้อยที่สุดและ ความโน้มถ่วงสูงสุดมีค่าโดยประมาณเท่ากับ 300 และ 290 และจากการเปรียบเทียบ จะเห็นว่าค่าของ input มีค่าต่างกันเท่ากับ 3% ซึ่งเป็นค่าที่ยอมรับได้ว่าข้อมูลทั้งสองมีความใกล้เคียงกันจริง

6. สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

จากการวิจัยพอสรุปได้ว่า คำตอบที่ได้จากการพิจารณาค่าความโน้มถ่วงสูงสุดนั้น มีความใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อยที่สุด เป็นฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุด ซึ่งจะมีผลดีในการวิเคราะห์ทางตัวเลขในเรื่องของ การที่สามารถกำหนดค่าเริ่มต้นและสุดท้ายให้กับแรงที่จะมาทำกับระบบได้ในอนาคต และนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้งานได้อย่างเหมาะสม หมายความว่า ได้ทั้งความโน้มถ่วงและประหยัดพลังงาน

เอกสารอ้างอิง

- [1] Agrawal SK., Fabien BC.(1999). Optimization of Dynamic Systems. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- [2] Bock HG.(1978). Numerical Solution of Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems with Application to Optimal Control. ZAMM. p. 58.
- [3] Craig JJ. (1986). Introduction to Robotic: Mechanics and Control. Addison-Wesley Publishing Company.
- [4] Mark WS. (1989). Robot Dynamics and Control. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [5] Kane TR., Levinson DA. (1985). Dynamics: Theory and Applications. McGraw-Hill Inc.
- [6] Veeraklaew T. (2000) Extensions of Optimization Theory and New Computational Approaches for Higher-order Dynamic systems [Dissertation]. Delaware: The University of Delaware.