การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 22
15-17 ตุลาคม 2551 มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต

การควบคุมลูกตุ้มกลับหัว 3 มิติ
Control of 3D Inverted Pendulum

มนูศักดิ์ จานทอง
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ปทุมธานี 12110
โทร 0-2549-3433 โทรสาร 0-2549-3432 อีเมล์ patnu@yahoo.com

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการควบคุมลูกตุ้มกลับหัว 3 มิติ ระบบลูกตุ้มกลับหัว 3 มิติประกอบไปด้วย แท่งมวลที่เคลื่อนที่บนระนาบ xy ของโต๊ะ xy และก้านลูกตุ้มที่สามารถหมุนได้ 2 แกนถูกวางบนแท่งมวล โดยเป้าหมายก็คือ เลี้ยงให้ก้านลูกตุ้มกลับหัวตั้งตรงอยู่ได้ พร้อมกันนั้นก็ควบคุมก้อนมวลให้เคลื่อนที่อยู่กึ่งกลางของโต๊ะ xy ตัวควบคุมแบบ LQR และ MRAC (Model Reference Adaptive Control) ถูกนำมาออกแบบควบคุมลูกตุ้มกลับหัว 3 มิติและเปรียบเทียบผลการทดลอง ระบบวิชั่นได้ถูกนำมาใช้เพื่อวัดมุมเอียงของก้านลูกตุ้มกลับหัว โดยใช้ข้อมูลรูปภาพจากกล้องซีมอสมาประมวลผลหามุมเอียงแทนที่ใช้เอนโคเดอร์

Abstract

This paper represents the control of 3D inverted pendulum. It consists of a mass which moves on the xy-plane of a xy-table and a rod placed on the mass can rotate about 2 axes. The objective is to stabilize the rod and control the mass position to stay at the middle of the xy-table. LQR and MRAC are used to implement and compare their results. Vision system is utilized to measure the tilt angle of the rod by using the image information of CMOS camera instead of an encoder.

1. บทนำ

ระบบลูกตุ้มกลับหัวเป็นระบบหนึ่งที่มีความน่าสนใจในการทดสอบของการควบคุมแบบป้อนกลับ ดังนั้นจึงมีผู้วิจัยหลากหลายท่านที่ให้ความสำคัญและทำการศึกษาและออกแบบตัวควบคุมหลากหลายชนิดมาควบคุมระบบลูกตุ้มกลับหัว อาทิเช่น อัลกอริธึมของ Guzella และ Isidori โดย Renou และคณะ [4] ได้ถูกนำมาใช้ในการคำนวณหาการแปลงไม่เชิงเส้นและกฏควบคุม เพื่อที่จะควบคุมระบบลูกตุ้มกลับหัวแบบก้านเดี่ยว การออกแบบตัวควบคุมแบบปริภูมิสถานะโดย Chinichian และคณะ [3] ถูกนำเสนอเพื่อควบคุมแบบจำลองเชิงเส้นของก้านลูกตุ้มกลับหัวที่มีจำนวนองศาอิสระเท่ากับ 2 และ Magana และคณะ [7] ได้ทำการทดลองและออกแบบตัวควบคุมฟัซซี่ลอจิกร่วมกับใช้ระบบวิชั่น เพื่อเลี้ยงลูกตุ้มกลับหัวแบบก้านเดี่ยวให้ตั้งตรงอยู่ได้ ส่วน Sprenger และคณะ [5] และ Chung และคณะ [6] ได้นำเอาหุ่นยนต์อุตสาหกรรมชนิด SCARA มาใช้เลี้ยงก้านลูกตุ้มกลับหัวที่มีองศาอิสระเท่ากับ 2 โดยแบบจำลองของลูกตุ้มกลับหัวนี้ถูกฉายลงบนระนาบ xz และ yz และแบบจำลองแต่ละระนาบที่ได้ถูกพิสูจน์ด้วยว่าอิสระแก่กันและสามารถควบคุมได้ไม่ขึ้นแก่กัน

บทความนี้นำเสนอการหาแบบจำลองระบบลูกตุ้มกลับหัว 3 มิติที่ถูกวางบนก้อนมวลที่เคลื่อนที่ได้บนโต๊ะ xy และเปรียบเทียบผลการควบคุมระหว่างตัวควบคุมแบบ LQR และ MRAC โดยต้องการควบคุมก้านลูกตุ้มให้ตั้งตรงอยู่ได้และก้อนมวลเคลื่อนที่อยู่บริเวณกึ่งกลางของโต๊ะ xy พร้อมกันนั้นแสดงการการเทียบมาตรฐานกล้อง (Camera calibration) เพื่อใช้กล้องดิจิตอลความเร็วสูงมาช่วยในการวัดมุมเอียงของก้านลูกตุ้มกลับหัว

2. แบบจำลองคณิตศาสตร์

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบลูกตุ้มกลับหัวได้ถูกจำแนกออกแบบ 2 ระบบย่อย ก็คือ

2.1 แบบจำลองคณิตศาสตร์ของก้านลูกตุ้มกลับหัว

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของก้านลูกตุ้มได้ถูกคำนวณหาด้วยสมการการเคลื่อนที่ของลากรองจ์ (Lagrange's equation)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i \qquad (1)$$

โดยที่ L , q และ Q เป็นฟังก์ชันลากรองจ์, Generalized coordinates และ Generalized forces ตามลำดับ สำหรับระบบก้านลูกตุ้มกลับหัวในรูปที่ 1 Generalized coordinates ก็คือ $[\psi\ \vartheta]$ ซึ่งเป็นค่ามุมเอียงของก้านลูกตุ้มกลับหัว และพลังงานจลน์ของระบบก็คือ

$$T=\frac{1}{2}M_B\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+l^2\dot{\vartheta}^2+l^2\dot{\psi}^2\cos^2\vartheta\right)-M_B l\sin\vartheta\sin\psi\,\dot{x}\dot{\vartheta}$$
$$+M_B l\cos\vartheta\cos\psi\,\dot{x}\dot{\psi}+M_B l\cos\vartheta\,\dot{y}\dot{\vartheta} \qquad (2)$$

โดยที่ x และ y เป็นระยะการเคลื่อนที่ของก้อนมวลในแนวแกน

x และ y ตามลำดับ ส่วน l และ M_B คือความยาวของก้านลูกตุ้มกลับหัวและมวลของลูกบอล ตามลำดับ พลังงานศักย์ของระบบสามารถเขียนเป็นสมการได้คือ

$$V = M_B g l \cos\vartheta \cos\psi \qquad (3)$$

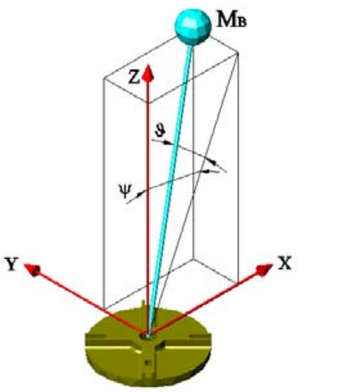
ส่วนฟังก์ชันของลากรองจ์สามารถหาได้ด้วย $L = T - V$
ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของก้านลูกตุ้มกลับหัว 3 มิติ ก็คือ

$$\cos\vartheta\cos\psi\,\ddot{x} + l\cos^2\vartheta\,\ddot{\psi} - 2l\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}\dot{\psi} - g\sin\psi\cos\vartheta = 0$$

$$-\sin\vartheta\sin\psi\,\ddot{x} + \cos\vartheta\,\ddot{y} + l\ddot{\vartheta} + l\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\psi}^2 - g\sin\vartheta\cos\psi = 0 \qquad (4)$$

สมการที่ได้เป็นสมการไม่เชิงเส้น ดังนั้นสมการนี้ถูกแปลงเป็นสมการเชิงเส้นบริเวณจุดสมดุล $\left(\psi,\vartheta,\dot{\psi},\dot{\vartheta},\ddot{x}\right) = (0,0,0,0,0)$ ได้เป็น

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= \left(\frac{g}{l}\right)\psi + \left(\frac{-1}{l}\right)\ddot{x} \\ \ddot{\vartheta} &= \left(\frac{g}{l}\right)\vartheta + \left(\frac{-1}{l}\right)\ddot{y} \end{aligned} \qquad (5)$$



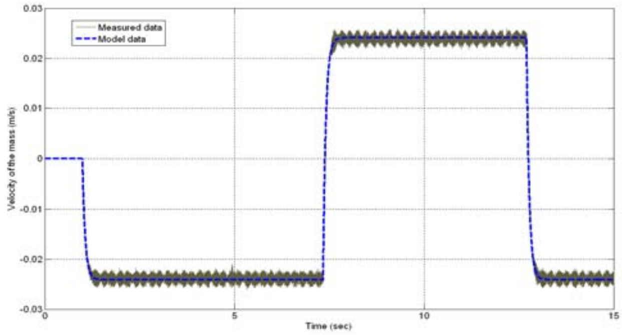
รูปที่ 1 ภาพจำลองก้านลูกตุ้มกลับหัว 3 มิติ

2.2 แบบจำลองคณิตศาสตร์ของก้อนมวล

แบบจำลองของก้อนมวลได้ถูกหาโดยใช้วิธีการหาเอกลักษณ์ของระบบ โดยจ่ายสัญญาณขาเข้าเป็นแรงดันไฟฟ้าไปที่มอเตอร์และวัดสัญญาณขาออกเป็นความเร็วของการเคลื่อนที่ของก้อนมวล เมื่อทำการเก็บข้อมูลแล้ววาดกราฟระหว่างความเร็วและเวลา ดังรูปที่ 2 ก็จะเห็นได้ว่าผลที่ได้ไม่มีแกว่งตัวเลย ระบบของก้อนมวลจึงถูกคาดว่าเป็นระบบอันดับหนึ่ง ซึ่งพารามิเตอร์ของระบบถูกคำนวณหาด้วยความช่วยเหลือของซอฟแวร์ MATLAB ทำให้ทราบแบบจำลองคณิตศาสตร์ของมวลดังนี้

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -14.0056\,\dot{x} + 0.3375 V_X \\ \ddot{y} &= -25.0\,\dot{y} + 0.5975 V_Y \end{aligned} \qquad (6)$$

โดยที่ V_X และ V_Y เป็นแรงดันไฟฟ้าในแกน x และ y ตามลำดับ และได้เปรียบเทียบผลที่ได้จากระบบจริงกับสมการคณิตศาสตร์ดังแสดงในรูปที่ 2 จากกราฟที่ได้เห็นได้ว่าเส้นกราฟที่ได้จากการทดลองกับจากแบบจำลองคณิตศาสตร์มีผลที่ใกล้เคียงกันมาก จึงสรุปได้ว่าแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ได้มาสามารถแสดงพฤติกรรมของการเคลื่อนที่ของก้อนมวลได้จริง



รูปที่ 2 ผลเปรียบเทียบระหว่างระบบจริงและแบบจำลอง

2.3 แบบจำลองคณิตศาสตร์ของทั้งระบบ

จากหัวข้อที่ 2.1 และ 2.2 ทำให้ทราบสมการการเคลื่อนที่ของทั้งก้านลูกตุ้มกลับหัวและก้อนมวล (5) และ (6) จากนั้นนำสมการทั้งคู่มาเขียนใหม่เพื่อสร้างสมการรวมทั้งระบบในรูปของปริภูมิสถานะ โดยที่มีเวคเตอร์สถานะเป็น $X = \left[\psi\ \dot{\psi}\ x\ \dot{x}\ \vartheta\ \dot{\vartheta}\ y\ \dot{y}\right]$ และเวคเตอร์ตัวแปรขาเข้าเป็น $U = \left[V_X\ \ V_Y\right]$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \qquad (7)$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g}{l} & 0 & 0 & \frac{14}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{l} & 0 & 0 & \frac{25}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-0.338}{l} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.338 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-0.598}{l} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.598 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

และค่า $l = 0.5$ เมตร

3. ตัวควบคุม LQR

สมการการเคลื่อนที่ของทั้งระบบ (7) ถูกใช้ในการออกแบบตัวควบคุมเพื่อหาเมตริกซ์อัตราขยายตัวควบคุม K ด้วย LQR โดยแผนผังการควบคุมได้แสดงในรูปที่ 3 และกฎควบคุมด้วยการป้อนกลับสถานะก็คือ

$$U = -KX \qquad (8)$$

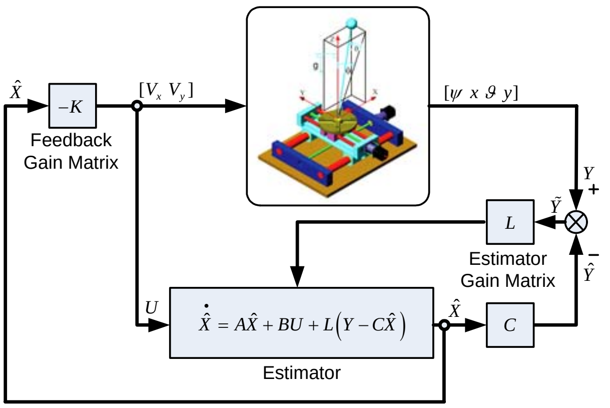
สำหรับการคำนวณหาเมตริกซ์อัตราขยายตัวควบคุม เมตริกซ์ Q และ

R ถูกกำหนดให้เป็น $diag\{30,0,1000,0,30,0,1000,0\}$ และ $diag\{0.0038,0.0038\}$ ตามลำดับ เมตริกซ์อัตราขยายตัวควบคุม K สามารถหาค่าได้เป็น

$$K = -\begin{bmatrix} 874 & 194 & 500 & 335 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 819 & 182 & 513 & 332 \end{bmatrix} \tag{9}$$

ตัวสังเกตแบบอันดับเต็ม (Full order observer) ถูกออกแบบเพื่อประมาณค่าเวคเตอร์สถานะ X ในการคำนวณหาเมตริกซ์อัตราขยายตัวประมาณ L ได้ใช้หลักการของ LQR เช่นกัน โดยที่เมตริกซ์ Q และ R ถูกเลือกเป็น $diag\{10,10,1000,10,10,10,1000,10\}$ และ $diag\{0.01,0.01,0.01,0.01\}$ ตามลำดับ เมตริกซ์อัตราขยายตัวประมาณ L สามารถคำนวณหาได้คือ

$$L = \begin{bmatrix} 34 & 93 & 0.006 & 1.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.006 & 0.26 & 316 & 0.13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 34 & 92.2 & 0.002 & 0.64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 316 & 0.59 \end{bmatrix} \tag{10}$$



รูปที่ 3 แผนผังการควบคุม LQR

4. ตัวควบคุม MRAC (Model Reference Adaptive Control)

ตัวควบคุมแบบ MRAC โดยใช้ตัวแปรสถานะเต็มอันดับที่ถูกนำเสนอโดย Winsor และ Roy [13] จะถูกนำมาออกแบบควบคุมระบบลูกตุ้มกลับหัว 3 มิติ จากสมการแบบจำลองของระบบ (7) จะเห็นได้ว่าระบบเมื่อถูกทำให้เป็นสมการเชิงเส้นแล้ว ระบบสามารถถูกแบ่งออกเป็นระบบที่อิสระแก่กันได้ 2 ระบบคือ ระบบในระนาบ xz มี V_X เป็นตัวแปรขาเข้า และมี x และ ψ เป็นตัวแปรขาออก และระบบในระนาบ yz มี V_Y เป็นตัวแปรขาเข้า และมี y และ ϑ เป็นตัวแปรขาออก ดังนั้นในการออกแบบก็จะออกแบบทีละระนาบ ซึ่งจะมีขั้นตอนเหมือนกัน ด้วยเหตุนี้บทความนี้จะแสดงการออกแบบเพียงระนาบเดียวเท่านั้นก็คือระนาบ xz โดยแผนผังการควบคุมได้แสดงดังรูปที่ 4

ระบบอ้างอิง (Reference model) จะถูกเลือกจาก ITAE สำหรับระบบอันดับ 4 ซึ่งเขียนเป็นสมการในรูปแบบปริภูมิสถานะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{z}_{xm} &= A_{xm} z_{xm} + B_{xm} r_x \\ y_{xm} &= C_{xm} z_{xm} + D_{xm} r_x \end{aligned} \tag{11}$$

โดยที่

$$A_{xm} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_n^4 & -2.7\omega_n^3 & -3.4\omega_n^2 & -2.1\omega_n \end{bmatrix},\ B_{xm} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$C_{xm} = diag\{1\,1\,1\,1\}$ และ $D_{xm} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$

และกำหนดให้ $\omega_n = 20\,rad/\sec$

ในการออกแบบตัวควบคุมชนิดนี้ระบบ (7) จะต้องถูกจัดให้อยู่ในรูปแบบ Controllable canonical form ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{z}_{xp} &= A_{xp} z_{xp} + B_{xp} u_{xp} \\ y_{xp} &= C_{xp} z_{xp} \end{aligned} \tag{12}$$

โดยที่

$$A_{xp} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{14g}{l} & \frac{g}{l} & -14 \end{bmatrix},\ B_{xp} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{xp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-0.338}{l} & 0 \\ \frac{-0.338g}{l} & 0 & 0.338 & 0 \end{bmatrix}$$

และ z_{xp} เป็นตัวแปรสถานะใหม่ที่ถูกแปลงมาจาก $\left[\psi\ \dot{\psi}\ x\ \dot{x}\right]^T$ ซึ่งสามารถหาได้จาก $z_{xp} = T_{\psi x}^{-1}\left[\psi\ \dot{\psi}\ x\ \dot{x}\right]^T$ โดยที่ $T_{\psi x}$ ก็คือ

$$T_{\psi x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{0.338}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{0.338}{l} \\ -\frac{0.338g}{l} & 0 & -0.338 & 0 \\ 0 & -\frac{0.338g}{l} & 0 & 0.338 \end{bmatrix} \tag{13}$$

เมื่อได้ระบบที่อยู่ในรูปแบบ Controllable canonical form แล้ว ดังนั้น Adaptive control law สามารถเขียนได้ดังนี้

$$U_{\psi x} = u_{xp} = -K_{\psi x} z_{xp} \tag{14}$$

โดยที่เมตริกซ์ $K_{\psi x}$ จำเป็นที่จะต้องมีค่าเริ่มต้นก่อน LQR จะถูกนำมาช่วยในการหาค่าของเมตริกซ์ $K_{\psi x}$ โดยกำหนดให้เมตริกซ์ Q และ R เป็น $diag\{5000,0,1,0\}$ และ 0.0038 ตามลำดับ ดังนั้นค่าเริ่มต้นของเมตริกซ์ $K_{\psi x}$ ก็คือ $[1147.1\ 940.8\ 213.2\ 12.1]$

และ Adaptive law คือ

$$\dot{K}_{\psi x} = -\left[p_{14} e_x + p_{24} \dot{e}_x + p_{34} \ddot{e}_x + p_{44} \dddot{e}_x\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^3 z_{xp} \tag{15}$$

โดยที่ $e_x = z_{xm} - z_{xp}$ ส่วนตัวแปร p_{xx} เป็นตัวแปรภายในของเมตริกซ์ P คือ

$$
P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{34} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} \end{bmatrix} \tag{16}
$$

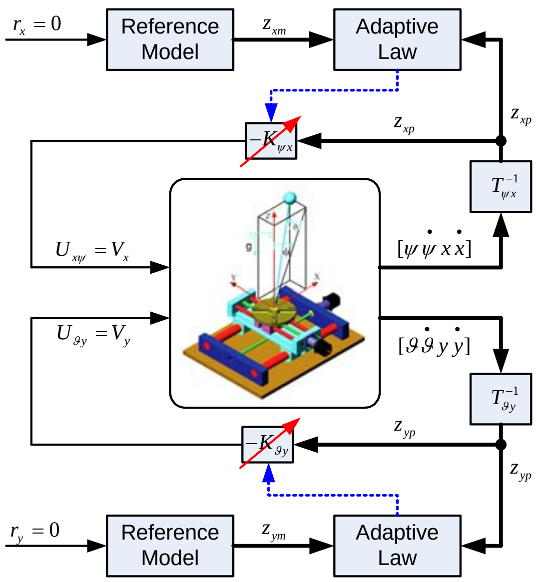
เมตริกซ์ P สามารถคำนวณหาได้จาก

$$
PA_m + A_m^T P = -Q \tag{17}
$$

และเมตริกซ์ $-Q = diag\{-q_1,-q_2,-q_3,-q_4\}$ ซึ่งค่าตัวแปรภายในของเมตริกซ์ P สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{18587q_1}{8420\omega_n} + \frac{370\omega_n q_2}{1263} + \frac{175\omega_n^3 q_3}{1263} + \frac{75\omega_n^5 q_4}{421} \\
p_{12} &= \frac{9747q_1}{4210\omega_n^2} + \frac{245q_2}{842} + \frac{315\omega_n^2 q_3}{842} + \frac{405\omega_n^4 q_4}{842} \\
p_{13} &= \frac{33923q_1}{25260\omega_n^3} + \frac{175q_2}{1263\omega_n} + \frac{75\omega_n q_3}{421} + \frac{590\omega_n^3 q_4}{1263} \\
p_{14} &= \frac{q_1}{2\omega_n^4} \\
p_{22} &= \frac{81679q_1}{25260\omega_n^3} + \frac{2767q_2}{1684\omega_n} + \frac{6583\omega_n q_3}{5052} + \frac{7261\omega_n^3 q_4}{5052} \\
p_{23} &= \frac{4403q_1}{2105\omega_n^4} + \frac{833q_2}{842\omega_n^2} + \frac{325q_3}{421} + \frac{1377\omega_n^2 q_4}{842} \\
p_{24} &= \frac{361q_1}{421\omega_n^5} + \frac{370q_2}{1263\omega_n^3} + \frac{175q_3}{1263\omega_n} + \frac{75\omega_n q_4}{421} \\
p_{33} &= \frac{18067q_1}{12630\omega_n^5} + \frac{1329q_2}{1684\omega_n^3} + \frac{6329q_3}{5052\omega_n} + \frac{12227\omega_n q_4}{5052} \\
p_{34} &= \frac{259q_1}{421\omega_n^6} + \frac{245q_2}{842\omega_n^4} + \frac{315q_3}{842\omega_n^2} + \frac{405q_4}{842} \\
p_{44} &= \frac{370q_1}{1263\omega_n^7} + \frac{175q_2}{1263\omega_n^5} + \frac{75q_3}{421\omega_n^3} + \frac{590q_4}{1263\omega_n}
\end{aligned} \tag{18}
$$

โดยกำหนดให้เมตริกซ์ $-Q = diag\{-1,-1,-1,-1\}$



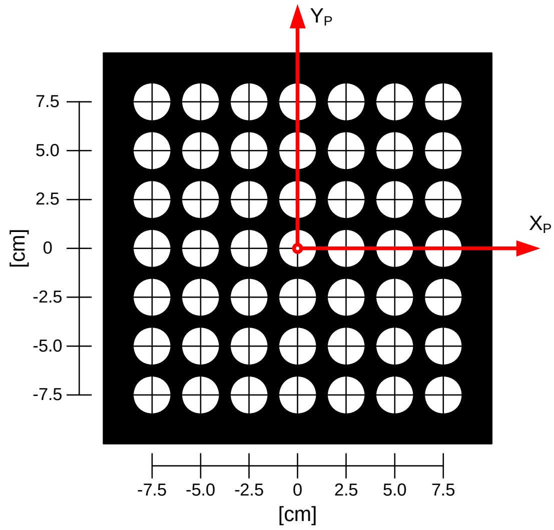
รูปที่ 4 แผนผังการควบคุม $MRAC$

5. การเทียบมาตรฐานกล้อง (Camera calibration)

ในการวัดค่ามุมเอียงของก้านลูกตุ้มกลับหัวได้ใช้กล้องดิจิตอลความเร็วสูงเข้ามาช่วยแทนการใช้โรตารีเอนโคเดอร์ กล้องตัวนี้ถูกกำหนดให้เก็บภาพ Gray scale ขนาด 8 บิท ด้วยความเร็ว 123 ภาพต่อวินาที ที่ขนาดภาพ 800x600 พิกเซล กล้องจะถูกติดตั้งไว้ด้านบนของโครงสร้างดังรูปที่ 6 กล้องจะเก็บภาพมวลทรงกลมสีขาวที่อยู่ปลายด้านบนของก้านลูกตุ้มกลับหัวและนำภาพที่ได้ไปประมวลผลหาตำแหน่งในระบบพิกัดรูปภาพ (Image coordinates) ด้วยวิธีของ Park และ Lee [13] ได้นำเสนอไว้ จากนั้นทำการแปลงตำแหน่งของมวลทรงกลมในระบบพิกัดรูปภาพให้อยู่ในระบบพิกัดโลก (World coordinates) ซึ่งในการแปลงนี้จำเป็นที่จะต้องทำการเทียบมาตรฐานกล้องเพื่อที่จะสร้างความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดรูปภาพกับพิกัดโลกด้วยแบบจำลองกล้อง Pin-Hold ที่ถูกผกผันคือ

$$
\begin{aligned}
X_B &= \frac{N_{XU}U + N_{XV}V + N_X}{D_U U + D_V V + 1} \\
Y_B &= \frac{N_{YU}U + N_{YV}V + N_Y}{D_U U + D_V V + 1}
\end{aligned} \tag{19}
$$

โดยที่ $N_{XU}, N_{XV}, N_X, N_{YU}, N_{YV}, N_Y, D_U$ และ D_V เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของแบบจำลองกล้อง Pin-Hold ส่วน U และ V เป็นค่าพิกัดในระบบพิกัดรูปภาพ, X_B และ Y_B เป็นค่าพิกัดในระบบพิกัดโลก



รูปที่ 5 ภาพ Pattern ที่ใช้ในการเทียบมาตรฐานกล้อง

ในการหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าได้ใช้แผ่นกระดาษหรือ Pattern ที่มีพื้นเป็นสีดำในรูปที่ 5 และภายในมีรูปวงกลมสีขาวจำนวน 49 วง เรียงวงกลมเป็นแถวๆละ 7 วงจำนวน 7 แถว โดยแต่ละแถวห่างกัน 2.5 ซม. และแต่ละวงกลมภายในแถวห่างกัน 2.5 ซม. จากนั้นวางแผ่นกระดาษนี้บนระนาบความสูงเดียวกันกับมวลทรงกลม โดยวางให้วงกลมตรงกลางของกระดาษอยู่ใต้แนวแกน z ในรูปที่ 1 และขนานกับพื้น จากนั้นทำการเก็บข้อมูลภาพของวงกลมทุกวงและหาตำแหน่งของวงกลมในระบบพิกัดรูปภาพ โดยตำแหน่งของแต่ละวงกลมในระบบพิกัดโลกเป็นค่าที่หาได้ โดยกำหนดให้ตำแหน่งของวงกลมสีขาวตรงกลางของกระดาษเป็นจุดกำเนิดของระบบพิกัดโลก ดังนั้นชุดข้อมูลของ

ตัวแปร U, V, X_B และ Y_B จะมีทั้งหมด 49 ชุดจากตำแหน่งของรูปวงกลม ชุดข้อมูลเหล่านี้พร้อมทั้งสมการแบบจำลองกล้อง (19) จะถูกใช้ในการหาตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของแบบจำลองกล้อง Pin-Hold ทั้ง 8 ตัวแปรด้วย Non-linear least squares

สำหรับการคำนวณหาค่ามุมเอียงของก้านลูกตุ้มกลับหัวจะใช้ค่าตำแหน่งของมวลทรงกลมหรือปลายด้านบนของก้านลูกตุ้มกลับหัวในระบบพิกัดโลกและตำแหน่งของก้อนมวลที่ปลายด้านล่างของก้านลูกตุ้มกลับหัวด้วยสมการดังนี้

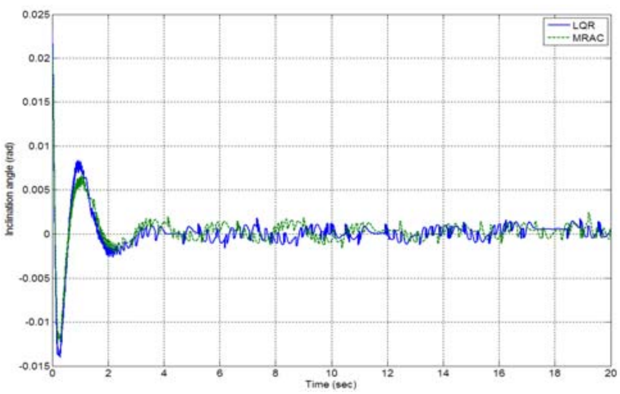
$$\begin{aligned} \vartheta &= \sin^{-1}\left(\frac{Y_B - Y_M}{l}\right) \\ \psi &= \sin^{-1}\left(\frac{X_B - X_M}{l\cos\vartheta}\right) \end{aligned} \qquad (20)$$

โดยที่ X_M และ Y_M เป็นค่าพิกัดของก้อนมวลในระบบพิกัดโลก

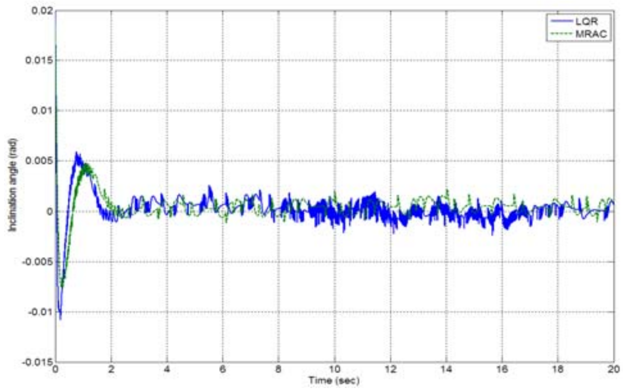
6. ผลการทดลอง

ตัวควบคุมที่ได้ออกแบบในหัวข้อ 3 และ 4 ได้ถูกนำมาทดสอบกับระบบลูกตุ้มกลับหัว 3 มิติดังแสดงในรูปที่ 6 และผลการทดลองได้แสดงออกมาเป็นกราฟในรูปที่ 7 ถึง 10

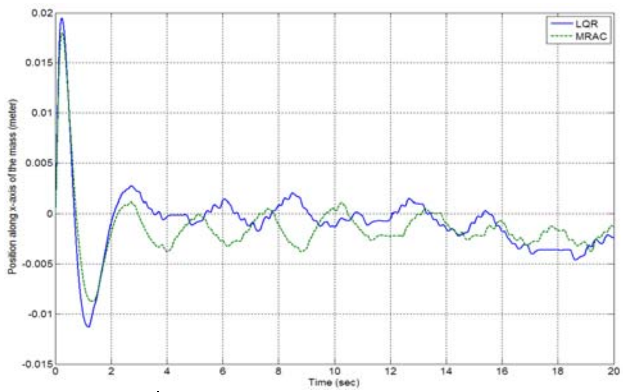
รูปที่ 6 ชุดทดลองระบบลูกตุ้มกลับหัว 3 มิติ



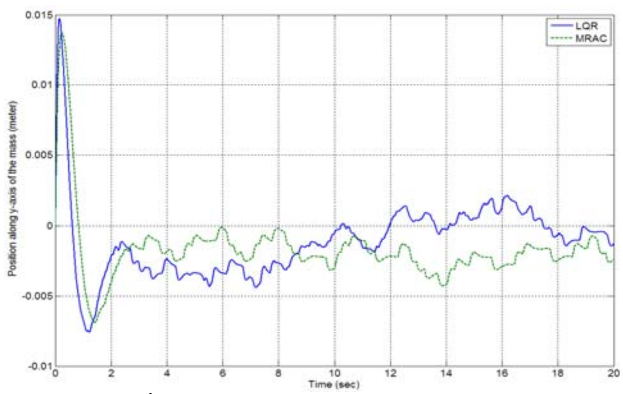
รูปที่ 7 มุมเอียง ψ ของก้านลูกตุ้มกลับหัว



รูปที่ 8 มุมเอียง ϑ ของก้านลูกตุ้มกลับหัว



รูปที่ 9 ตำแหน่งของก้อนมวลในแนวแกน x



รูปที่ 10 ตำแหน่งของก้อนมวลในแนวแกน y

7. สรุป

บทความนี้นำเสนอการหาแบบจำลองการเคลื่อนที่ของระบบลูกตุ้มกลับหัว 3 มิติ และการเทียบมาตรฐานกล้องเพื่อใช้ในการวัดตำแหน่งของปลายด้านบนของก้านลูกตุ้มกลับหัวและคำนวณหามุมเอียงของก้านลูกตุ้ม ตัวควบคุมแบบ LQR และ MRAC ถูกพัฒนาเพื่อเลี้ยงก้านลูกตุ้มกลับหัวและควบคุมตำแหน่งของก้อนมวลให้อยู่ตรงกลางของโต๊ะ

เอกสารอ้างอิง

1. Nise, N. S., 2000. Control Systems Engineering. John Wiley & Sons, US.
2. Franklin, G. F., 2002. Feedback Control of Dynamic Systems. Prentice Hall, US.

3. Chinichian, M., and Kashani, R., "State space controller design for a spatial inverted cart/pendulum system", in Proceedings of the 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems, Champaign, IL, August 1989.
4. Renou, S., and Saydy, L., "Real time control of an inverted pendulum based on approximate linearization", in Proceedings of Canadian Conf. on Electrical and Computer Eng., Calgary, Alta, USA., May 1996.
5. Sprenger, B., Kucera, L. and Mourad, S., 1998. Balancing of an inverted pendulum with a SCARA robot. IEEE/ASME Trans. on Mechatronics, Vol. 3, Issue 2, pp. 91 - 97.
6. Chung, C. Y., Lee, S. M., Lee, J. W., and Lee, B. H., "Balancing of an inverted pendulum with a kinematically redundant robot", in Proceedings of IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, Kyongiu, South Korea, October 1999.
7. Magana, M. E., and Holzapfel, F., 1998. Fuzzy-logic control of an inverted pendulum with vision feedback. IEEE Trans. Education, Vol. 41, Issue 2, pp. 165 - 170.
8. Yamakita, M., Hoshino, T., and Furuta, K., "Control practice using pendulum", in Proceedings of American Control Conf., San Diego, California, June 1999.
9. Corke, P. I., 1996. Visual control of robots: high-performance visual servoing. Research Studis Press, Great Britain.
10. Martinet, P., and Gallice, J., "Poisition based visual servoing using a non-linear approach", in Proceedings of IEEE/RSJ Int. Conf. On Intelligent Robots and Systems, Kyongju, South Korea, Oct., 1999.
11. Park, S.W., and Lee, C.S.G., "Very Fast Visual Tracking Algorithm Using Scanline", in Proceedings of IEE Int. Conf. On Robotics and Automation, Nagoya, Japan, May, 1995.
12. Yi, W., "A fast finding and fitting algorithm to detect circles", in Proceedings of IGARSS'98, Seattle, WA, USA, July 1998.
13. Winsor, C. A., and Roy, R. J., 1968. Design of model reference adaptive control systems by Liapunov's second method. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 13, Issue 2, pp. 204 - 204.