การวิเคราะห์ความผิดพลาดจากการตัดปลายของการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์: ปัญหาหนึ่งมิติการพา-การแพร่

Truncation Error Analysis of the Richardson's Extrapolation for the Differential Equations: One-Dimensional Convection-Diffusion Problem

นิวัฒน์ ภู่เจริญ[1, 2*] , จารุวัตร เจริญสุข[1*] และ ทวี เทศเจริญ[1]
[1] สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520
โทร 02-7373000 ต่อ 3504 โทรสาร 02-7392490 *อีเมล์ kcjarruw@kmitl.ac.th
[2] สำนักวิจัยและบริการคอมพิวเตอร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520
โทร 02-3264329 โทรสาร 02-3264335 *อีเมล์ kpniwat@kmitl.ac.th

Niwat Phoocharoen[1, 2*] , Jarruwat Charoensuk[1*] and Thavee Tescharoen[1]
[1] Mechanical Engineering Department, Engineering Division, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 10520, Thailand, Tel: 02-7373000 ext. 3504, Fax: 02-7392490, *E-mail: kcjarruw@kmitl.ac.th
[2] Computer Research and Service Center, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 10520, Thailand, Tel: 02-3264329, Fax: 02-3264335, *E-mail: kpniwat@kmitl.ac.th

บทคัดย่อ

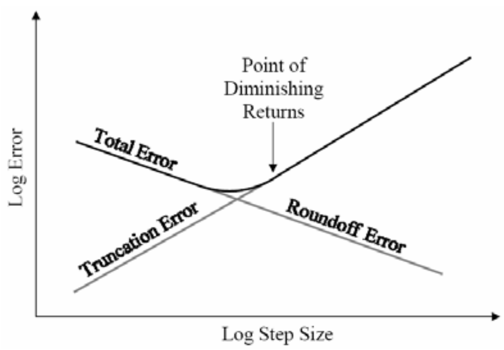
ในบทความนี้ได้นำเสนอวิธีการปรับปรุงการประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน โดยตั้งสมมุติฐานจากหลักการของความผิดพลาดจากการตัดปลายของการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ ว่าถ้าความผิดพลาดจากการตัดปลายอันดับยิ่งสูงความแม่นยำย่อมสูงตาม จากหลักการนี้ได้นำไปสู่การประยุกต์ใช้สมการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน วิธีการนี้จะทำให้ความผิดพลาดจากการตัดปลายอยู่ที่อันดับที่สี่หรือที่เรียกกันโดยทั่วไปว่ามาตรฐานการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน ซึ่งน่าจะมีความแม่นยำสูงกว่าการประมาณค่าอนุพันธ์แบบผลต่างกึ่งกลาง โดยทำการทดสอบสมมุติฐานข้างต้นด้วยการเปรียบเทียบกันระหว่างความผิดพลาดจากการตัดปลายอันดับที่สองของวิธีผลต่างสืบเนื่องแบบผลต่างกึ่งกลางและความผิดพลาดจากการตัดปลายอันดับที่สี่ของวิธีผลต่างสืบเนื่องแบบผลต่างกึ่งกลางด้วยวิธีริชาร์ดสัน โดยทดสอบกับปัญหาการพา-การแพร่ในระบบพิกัดฉากหนึ่งมิติ จากผลการเปรียบเทียบพบว่าความผิดพลาดจากการตัดปลายอันดับที่สี่ให้ผลลัพธ์แม่นยำมากกว่าความผิดพลาดจากการตัดปลายอันดับที่สองเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงและในอนาคตจะทำการปรับปรุงวิธีผลต่างสืบเนื่องแบบผลต่างย้อนหลังสำหรับเทอมการพาและแบบผลต่างไปข้างหน้าสำหรับเทอมของเวลาตามลำดับต่อไป

Abstract

In this paper, a methodology for improvement of derivation approximation by means of Richardson's extrapolation technique is proposed. The study is based on the assumption of Taylor's series expansion; the increasing of the solution accuracy can be obtained by increasing the order of truncation error of Richardson's extrapolation method, which is expected to have greater accuracy than that of normal central differencing scheme. The assumption has been proofed by comparing the 2^{nd} order truncation error of normal central differencing and the 4^{th} order truncation error of the first iteration standard Richardson's central extrapolation. The study is conducted on a one dimensional convection-diffusion problem in order to exhibit the capability of this new idea. The numerical results from the fourth order approximation of truncation error are relatively in excellent agreement with the analytical results. Future development will focus on the application of such method for backward and forward differences that represent convection and time derivative terms, respectively.

1. บทนำ

จากปัญหาความผิดพลาดรวมของการคำนวณเชิงตัวเลขในการแบ่งขนาดระยะคำนวณ อันเกิดจากความสัมพันธ์ของความผิดพลาดจากการตัดปลายและขนาดระยะของการคำนวณ โดยขนาดระยะยิ่งมีขนาดเล็กความผิดพลาดยิ่งน้อย รวมกับความสัมพันธ์ของความผิดพลาดจากการปัดเศษและขนาดระยะ โดยขนาดระยะยิ่งมีขนาดเล็กความผิดพลาดยิ่งมาก ตามลำดับดังรูปที่ 1 [1]



รูปที่ 1 ความผิดพลาดกับขนาดระยะ

ดังนั้นในบทความนี้จะนำเสนอเฉพาะวิธีการปรับปรุงความผิดพลาดจากการตัดปลายของการคำนวณเชิงตัวเลขเท่านั้น เนื่องจากถ้าเราสามารถเพิ่มความแม่นยำได้โดยไม่ลดขนาดระยะในการคำนวณลงจะส่งผลให้ความผิดพลาดรวมดีขึ้น จึงเป็นที่มาของวัตถุประสงค์ของงานวิจัยในครั้งนี้

2. ทฤษฎี

การพัฒนาวิธีการประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสองวิธีที่จะได้กล่าวต่อไปนี้อยู่บนพื้นฐานเดียวกันคือ การประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ ดังนี้

2.1 วิธีผลต่างสืบเนื่องแบบผลต่างกึ่งกลาง

การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ [1]

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!}h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \frac{f^4(x_i)}{4!}h^4 + \frac{f^5(x_i)}{5!}h^5 + \frac{f^6(x_i)}{6!}h^6 + \cdots \quad (1)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \frac{f'(x_i)}{1!}h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \frac{f^4(x_i)}{4!}h^4 - \frac{f^5(x_i)}{5!}h^5 + \frac{f^6(x_i)}{6!}h^6 - \cdots \quad (2)$$

นำสมการที่ (1)-(2) ได้

$$f'(x_i) \approx [f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})]/2h + O(h^2) \quad (3)$$

นำสมการที่ (1)+(2) ได้

$$f''(x_i) \approx [f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})]/h^2 + O(h^2) \quad (4)$$

สมการที่ (3) และ (4) เรียกว่าวิธีผลต่างสืบเนื่องแบบผลต่างกึ่งกลางของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและสองตามลำดับโดยมีความผิดพลาดจากการตัดปลายอันดับที่สอง

2.2 วิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน

วิธีการประมาณค่านี้ถูกพัฒนาโดย L.F. Richardson และ J.A. Gaunt ในปี 1927 และถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขตามมาดังนี้ ในปี 2003 Maria Caridad Natividad และ Martin Stynes [6] นำมาปรับปรุงความแม่นยำของวิธีการประมาณค่าด้วยอัปวินด์ ต่อมาในปี 2004 Armando Arciniega และ Edward Allen [5] นำมาปรับปรุงวิธีแบบปริยายและวิธีของแครงก์-นิโคลสันให้มีอันดับความแม่นยำสูงขึ้นและยังช่วยลดเวลาในการคำนวณได้อีกด้วยและในปี 2006 Kumar Rahul และ S.N. Bhattacharyya [4] นำมาปรับปรุงความผิดพลาดจากการตัดปลายอันดับสูงให้มีความแม่นยำมากขึ้น

ขั้นตอนและวิธีคำนวณการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันโดยอาศัยหลักการของการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ ดังนี้

นำสมการที่ (1)-(2) ได้ [3]

$$f'(x_i) \approx \frac{4}{3}\varphi\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\varphi(h) + O(h^4) \quad (5)$$

นำสมการที่ (1)+(2) ได้

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + 2\frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + 2\frac{f^4(x_i)}{4!}h^4 + 2\frac{f^6(x_i)}{6!}h^6 + \cdots \quad (6)$$

นำ h^2 หารตลอดสมการที่ (6) จะได้

$$[f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})]/h^2 = 2f(x_i)/h^2 + f''(x_i) + 2\frac{f^4(x_i)}{4!}h^2 + 2\frac{f^6(x_i)}{6!}h^4 + \cdots \quad (7)$$

ย้ายข้างหาอนุพันธ์อันดับที่สอง

$$f''(x_i) = [f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})]/h^2 - 2\frac{f^4(x_i)}{4!}h^2 - 2\frac{f^6(x_i)}{6!}h^4 - \cdots \quad (8)$$

เปลี่ยนพจน์แรกด้านขวามือ ของสมการที่ (8) ให้เป็นตัวดำเนินการของริชาร์ดสัน

$$\psi(h) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} \quad (9)$$

และเปลี่ยนสัมประสิทธิ์หน้า h^n ให้เป็น a_n ตามลำดับ จะได้

$$f''(x_i) = \psi(h) - a_2 h^2 - a_4 h^4 - \cdots \qquad (10)$$

ย้ายข้างหาตัวดำเนินการของริชาร์ดสัน

$$\psi(h) = f''(x_i) + a_2 h^2 + a_4 h^4 + \cdots \qquad (11)$$

หาตัวดำเนินการของริชาร์ดสันที่ $h/2$

$$\psi\left(\frac{h}{2}\right) = f''(x_i) + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \cdots \qquad (12)$$

คูณ 4 ตลอดสมการที่ (12)

$$4\psi\left(\frac{h}{2}\right) = 4f''(x_i) + a_2 h^2 + a_4 \frac{h^4}{4} + \cdots \qquad (13)$$

นำสมการที่ (11)-(13) ได้

$$\begin{aligned}\psi(h) - 4\psi\left(\frac{h}{2}\right) &= f''(x_i) - 4f''(x_i) \\ &\quad + a_4 h^4 - a_4 \frac{h^4}{4} + \cdots\end{aligned} \qquad (14)$$

จัดรูปใหม่เป็น

$$\psi(h) - 4\psi\left(\frac{h}{2}\right) = -3f''(x_i) + \frac{3}{4}a_4 h^4 + \cdots \qquad (15)$$

นำ -3 หารตลอดสมการที่ (15) จะได้

$$-\frac{1}{3}\psi(h) + \frac{4}{3}\psi\left(\frac{h}{2}\right) = f''(x_i) - \frac{1}{4}a_4 h^4 - \cdots \qquad (16)$$

ย้ายข้างหาสมการอนุพัธ์อันดับที่สองของริชาร์ด

$$f''(x_i) = \frac{4}{3}\psi\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\psi(h) + \frac{1}{4}a_4 h^4 + \cdots \qquad (17)$$

เขียนสมการที่ (17) ให้อยู่ในรูปของสมการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของริชาร์ดสัน

$$f''(x_i) \approx \frac{4}{3}\psi\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\psi(h) + O\left(h^4\right) \qquad (18)$$

สมการที่ (18) เรียกว่าสมการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสันแบบมาตรฐานอนุพันธ์อันดับที่สองโดยความผิดพลาดจากการตัดปลายอันดับที่สี่

2.3 วิธีผลเฉลยแม่นตรง

การหาค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีผลเฉลยแม่นตรงเป็นวิธีการหาโดยตรงจากสูตรที่มีอยู่ทางคณิตศาสตร์และสมการที่ใช้ทดสอบเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของการพา-การแพร่ในระบบพิกัดฉากหนึ่งมิติสภาวะคงตัว [2] สมการเชิงอนุพันธ์ของการพา-การแพร่

$$\rho u \frac{d\phi}{dx} = \Gamma \frac{d^2\phi}{dx^2} \qquad (19)$$

เงื่อนไขขอบเขต [2]

$$\phi_0 = 1 \text{ ที่ } x = 0 \text{ และ } \phi_L = 0 \text{ ที่ } x = L \qquad (20)$$

ผลเฉลยแม่นตรง [2]

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(\rho u x/\Gamma) - 1}{\exp(\rho u L/\Gamma) - 1} \qquad (21)$$

3. ผลลัพธ์จากการคำนวณ

ผลลัพธ์จากการคำนวณทั้งสองวิธีได้แสดงในตารางที่หนึ่งและกำหนดให้ความผิดพลาดจากการปัดเศษทศนิยมตำแหน่งที่สิบสอง จาก [2] กำหนดให้ $u = 2.5$, $\rho = 1$ และ $\Gamma = 0.1$ ดังนั้น ผลเฉลยแม่นตรงของสมการเชิงอนุพันธ์ของการพา-การแพร่

$$\phi(x) = \frac{\exp(25) - \exp(25x)}{\exp(25) - 1} \qquad (22)$$

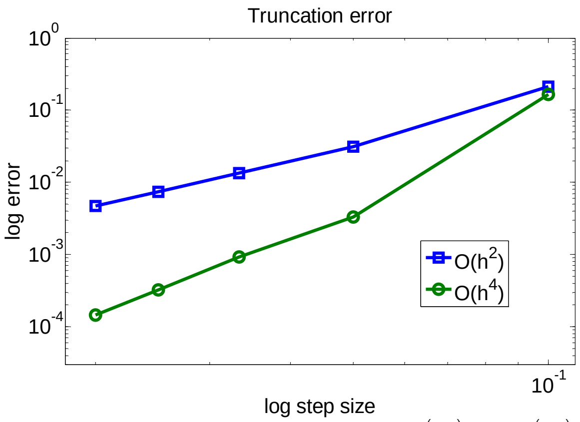
แทนค่า $x = 0.9$ จะได้

$$\phi(0.9) = 0.917915001389$$

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบความผิดพลาดกับขนาดระยะ

h	$O(h^2)$	$O(h^4)$
1/10	0.210472766812	0.163513308351
1/20	0.031408747757	0.003293770118
1/30	0.013367491967	0.000916385613
1/40	0.007410904356	0.000324091879
1/50	0.004711763738	0.000143733763

เปรียบเทียบผลการคำนวณของความผิดพลาดกับขนาดระยะทั้งสองวิธีด้วยกราฟลอกะริธึม-ลอกะริธึมเพื่อให้เห็นความแตกต่างของวิธีคำนวณให้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น



รูปที่ 2 เปรียบเทียบความผิดพลาดของ $O(h^2)$ กับ $O(h^4)$

4. การวิเคราะห์ผลการคำนวณ

จากตารางที่หนึ่งและรูปที่สองของกรณีศึกษาจะทำการวิเคราะห์ผลการคำนวณทั้งสองวิธีแยกเป็นส่วนๆในแต่ละวิธีดังนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องแบบผลต่างกึ่งกลาง

วิธีผลต่างกึ่งกลางมีความแม่นยำใกล้เคียงกับวิธีริชาร์ดสันที่ขนาดระยะคำนวณ $h_c = 1/10$ แต่มีความแม่นยำน้อยกว่าวิธีริชาร์ดสันที่ขนาดระยะคำนวณ $h_c = 1/20$, $h_c = 1/30$, $h_c = 1/40$ และ $h_c = 1/50$ ตามลำดับ

2. วิธีการประมาณค่านอกช่วงของริชาร์ดสัน

วิธีริชาร์ดสันมีความแม่นยำมากกว่าวิธีผลต่างกึ่งกลางที่ $h_R = 1/20$ ทุกกรณีศึกษา

5. สรุปผล

การประมาณค่าอนุพันธ์ของวิธีผลต่างสืบเนื่องแบบผลต่างกึ่งกลางด้วยวิธีริชาร์ดสันที่ความผิดพลาดจากการตัดปลายอันดับที่สี่มีความแม่นยำมากกว่าวิธีผลต่างสืบเนื่องแบบผลต่างกึ่งกลางที่ความผิดพลาดจากการตัดปลายอันดับที่สอง

6. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.มนัส สังวรศิลป์ ผู้อำนวยการสำนักวิจัยและบริการคอมพิวเตอร์ที่อนุเคราะห์โปรแกรม MATHEMATICA และ MATLAB ในการทำวิจัยในครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] CHAPRA, CANALE, 1989. NUMERICAL METHODS for ENGINEERS. 2nd ed., McGraw-Hill, Singapore.

[2] VERSTEEG, MALALASEKERA, 1995. An introduction to computational fluid dynamics, The finite volume method. 1st ed., Longman Scientific & Technical, Malaysia.

[3] P. NIWAT, J. JARRUWAT, 2007. Round-off Error Analysis of the Richardson's Extrapolation for the Differential Equations: First-Order Derivative. ME-NETT 21, Chonburi, Thailand, october 17-19.

[4] Kumar Rahul, S.N. Bhattacharyya, 2006. One-sided finite-difference approximations suitable for use with Richardson extrapolation. Vol. 219, pp. 13-20, Journal of Computational Physics.

[5] Armando Arciniega, Edward Allen, 2004. Extrapolation of difference methods in option valuation. Vol. 153, pp. 165-186, Applied Mathematics and Computation.

[6] Maria Caridad Natividad, Martin Stynes, 2003. Richardson extrapolation for a convection–diffusion problem using a Shishkin mesh. Vol. 45, pp. 315-329, Applied Numerical Mathematics.