การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิภายในทรงกระบอก ด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

Calculating Inside Cylinder Temperature Response By Finite Resistance-Capacitance Method

ประเสริฐ อินประเสริฐ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม
235 ถนนเพชรเกษม เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10163
โทร. 457-0068 ต่อ 121, โทรสาร 457-3982, อีเมล์ Prasert_Inp@yahoo.com

Prasert Inprasert
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Siam University
235 Petkasem Road, Phasicharoen, Bangkok 10163
Tel: 457-0068 Ext 121, Fax: 457-3982, E-Mail: Prasert_Inp@yahoo.com

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิภายในทรงกระบอกที่เปลี่ยนไปตามเวลาด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์ โดยการแบ่งเนื้อวัสดุออกเป็นทรงกระบอกกลวงผนังบางซ้อนกันเป็นจำนวนมาก ซึ่งแต่ชิ้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว สำหรับการคำนวณการพาความร้อนบริเวณผิววัสดุไปยังของไหลจะใช้ตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว แล้วใช้โปรแกรมอิเลคทรอนิคส์เวิร์คเบนช์คำนวณแบบจำลองนี้เปรียบเทียบกับผลการคำนวณทางทฤษฎีว่าอุณหภูมิที่ได้มีความผิดพลาดเพียงใด เมื่อกำหนดให้แท่งทรงกระบอกอลูมิเนียมมีรัศมี 50 mm. และมีความสูงไม่จำกัด มีอุณหภูมิเริ่มต้น 200°C มีค่าสภาพการนำความร้อน 237 W/m.°C, ความหนาแน่น 2702 kg/m^3 และความความร้อนจำเพาะ 903 J/kg. °C ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ 50 °C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน 500 W/m^2.°C เมื่อคำนวณอุณหภูมิที่ตำแหน่งลึกจากผิวหน้า 25 mm. ด้วยโปรแกรมโดยให้เวลาผ่านไป 360 วินาที ปรากฏว่ามีความผิดพลาด 0.43 % จากค่าความผิดพลาดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความร้อนวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์นี้สามารถคำนวณโดยทฤษฎีวงจรไฟฟ้าได้ ซึ่งจะเป็นการง่ายในการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางไฟฟ้าคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยนไปตามเวลาที่มีความซับซ้อนของเนื้อวัสดุต่อไป
คำสำคัญ:วิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์, การตอบสนองอุณหภูมิ, อุณหภูมิภายในทรงกระบอก, ชิ้นส่วนทรงกระบอกกลวง

Abstract

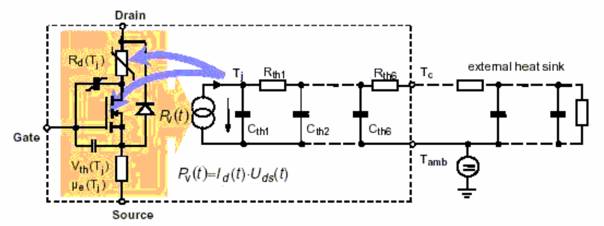
This paper presents to calculate inside cylinder temperature response by the finite resistance-capacitance method. By divide a material to many thin wall hollow cylindrical elements, each element assembles 2 parts of a conduction resistance and a heat capacitance. For calculate convection heat transfer on a surface area to fluid use a convection resistance. Using ELECTRONIC WORKBENCH software to calculate this finite resistance-capacitance model and compare with analytical method to find temperature response errors. On the calculation let an aluminum cylinder infinite high, 50 mm radius. This cylinder initially at 200 °C has thermal conductivity 237 W/m.°C, density 2702 kg/m^3 and specific heat 903 J/kg.°C. This object is placed suddenly in fluid at 50 °C. Estimate the convection heat transfer coefficient is 500 W/m^2.°C. Calculating temperature at 25 mm depth from the surface by this software to 360 sec having an error result 0.43 %. From error results show that this finite resistance-capacitance model can be calculated by electrical theory which easy to use electrical software to solve in heat transfer response problem of complicated meterials in the future.
Keyword: finite resistance-capacitance method, temperature response, inside cylinder temperature, hollow cylindrical element

1. บทนำ

วิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์เป็นการคำนวณการถ่ายความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยน[6] โดยการแบ่งเนื้อวัสดุออกเป็นชิ้นเล็กๆเป็นจำนวนมาก แต่ชิ้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว สำหรับการคำนวณบริเวณผิววัสดุที่มีการพาความร้อนโดยของไหลจะใช้ตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว แล้วใช้โปรแกรมคำนวณวงจรไฟฟ้าคำนวณแบบจำลองนี้

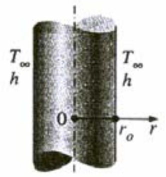
ในการแก้ปัญหาการถ่ายความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยนที่มีเพียงชิ้นเดียวได้แสดงการคำนวณให้เห็นว่าวิธีการนี้สามารถนำไปใช้ได้[1] และเมื่อเพิ่มจำนวนชิ้นมากขึ้นให้เป็นวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์โดยนำมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณหาอุณหภูมิในผนังที่เวลาผ่านไปจะให้ค่าที่ถูกต้องมากขึ้นเมื่อแบ่งจำนวนชิ้นที่มากขึ้น [2]

จากนี้ยังมีการใช้วงจรทางไฟฟ้าคำนวณร่วมกับวงจรทางความร้อนเพื่อศึกษาผลของความร้อนที่มีต่อชิ้นส่วนอิเลคทรอนิคส์ เนื่องจากการไหลของไฟฟ้ามีผลให้เกิดความร้อนในชิ้นส่วนอิเลคทรอนิคส์และความร้อนที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนอิเลคทรอนิคส์มีผลต่อการไหลของกระแสไฟฟ้าเช่นกัน[5]



รูปที่ 1 วงจรไฟฟ้าด้านซ้ายเป็นวงจรไฟฟ้าของ DMOS ส่วนด้านขวาเป็นวงจรไฟฟ้าของ Heat sink [5]

บทความนี้จะทำการสร้างแบบจำลองคณิตศาตร์ในพิกัดทรงกระบอก(Cylindrical coordinate) โดยแบ่งวัตถุเป็นชิ้นส่วนย่อยรูปทรงกระบอกกลวงและทรงกระบอกตันเป็นแกนกลางมาตรวจสอบความถูกต้องกับทฤษฎีการคำนวณอุณหภูมิภายในเนื้อวัตถุรูปทรงกระบอกซึ่งน่าจะสามารถลดเวลาในการคำนวณและแบ่งจำนวนชิ้นย่อยลงได้เป็นจำนวนมาก เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้ชิ้นส่วนย่อยแบบลูกบาศก์ในพิกัดแกนตั้งฉาก (Rectangular coordinate) ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการนำแบบจำลองนี้ไปใช้ในปัญหาที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นต่อไป



รูปที่ 2 ทรงกระบอกที่พิจารณาจุ่มลงในของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า [7]

2. การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน

ในที่นี้จะกล่าวถึงการคำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในทรงกระบอกที่รัศมี r โดยทรงกระบอกมีรัศมี r_o ดังรูปที่ 2 ซึ่งมีความยาวมากเมื่อเทียบกับเส้นผ่าศูนย์กลางทรงกระบอก จะได้ว่าอุณหภูมิที่ระดับความลึกเดียวกันจากผิวหน้ามีค่าเท่ากันตลอดเมื่อไม่พิจารณาบริเวณขอบวัสดุที่สัมผัสของไหลของด้านปลายทรงกระบอกทั้งสองด้าน

2.1 เงื่อนไขการคำนวณ

พิจารณาถึงความเป็นไปได้ที่อุณหภูมิในทรงกระบอกจะมีค่าไม่เท่ากัน หลังจากจุ่มลงในของไหลที่มีอุณหภูมิต่างจากผิวทรงกระบอกเมื่อเวลาผ่านไป เนื่องมาจากสาเหตุเหล่านี้คือ สภาพการนำความร้อนวัสดุมีค่าต่ำมาก, สัมประสิทธิ์การพาความร้อนผิววัสดุสูงมาก หรือทรงกระบอกมีขนาดใหญ่มาก ซึ่งความสัมพันธ์ของเงื่อนไข 3 ประการนี้แสดงเป็นค่า Biot number (Bi) ถ้าผลการคำนวณค่า Bi > 0.1 จะเป็นค่าที่ยอมรับว่าการกระจายอุณหภูมิมีความแตกต่างกัน > 5 % [7] ซึ่งจะเป็นเงื่อนไขบังคับให้ต้องคำนวณการกระจายอุณหภูมิภายในวัตถุ ถ้าต้องการคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนให้ถูกต้องยิ่งขึ้น

$$Bi = \frac{hr_0}{k} \tag{1}$$

เมื่อ h - สัมประสิทธิ์การพาความร้อน ($W/m^2.^oC$)

r_0 - รัศมีทรงกระบอก (m)

k - สภาพการนำความร้อนวัสดุ ($W/m.^oC$)

2.2 อุณหภูมิวัตถุที่เวลาใด ๆ

สมการที่ใช้หาค่าอุณหภูมิวัสดุที่เวลาใดๆเป็นดังนี้[3]

$$\frac{(T_{x,t} - T_\infty)}{(T_i \ \ - T_\infty)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\xi_n^2 Fo} J_0\left(\xi_n \frac{r}{r_0}\right) \tag{2}$$

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\xi_n^2 Fo} J_0(\xi_n r^*) \tag{3}$$

โดย

$$C_n = \frac{2}{\xi_n} \cdot \frac{J_1(\xi_n)}{J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n)} \tag{4}$$

$$\xi_n \frac{J_1(\xi_n)}{J_0(\xi_n)} = Bi \tag{5}$$

$$Fo = \frac{kt}{\rho C_p r_0^2} = \frac{\alpha t}{r_0^2} \tag{6}$$

เมื่อ $T_{x,t}$ - อุณหภูมิวัสดุที่ความลึกจากผิวหน้า x ณ เวลา t (^oC)

T_∞ - อุณหภูมิของไหล (^oC)

T_i - อุณหภูมิเริ่มต้นของวัสดุ (^oC)

t - เวลาที่ผ่านไป (s)

α - ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่กระจายความร้อน (m^2/s)

ρ - ความหนาแน่นของวัสดุ (kg/m^3)

C_p - ความร้อนจำเพาะของวัสดุ ($J/kg.^oC$]

สำหรับการคำนวณโดยประมาณ(Approximate solution) นั้น จะใช้ค่า n=1 เท่านั้น ซึ่งต้องตรวจสอบ Fourier number (Fo) ถ้าผลการคำนวณค่า Fo > 0.2 จะเป็นค่าที่ยอมรับว่าอุณหภูมิที่คำนวณได้ที่เวลา

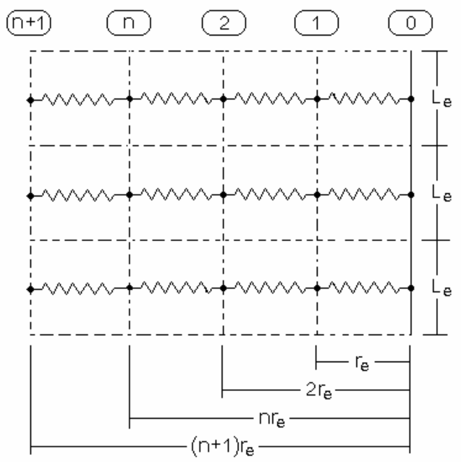
ต่างๆมีความผิดพลาด < 2 % [7] แต่ถ้าค่า Fo < 0.2 ต้องเพิ่มอันดับ n ให้มากขึ้น เช่น n= 1,2 หรือ n=1,2,3 เป็นต้น

3.การวิเคราะห์แบบวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

โดยการแบ่งเนื้อวัสดุออกเป็นชิ้นเล็กๆรูปทรงกระบอกตันเป็นแกนกลางแล้วซ้อนด้วยทรงกระบอกกลวงจำนวนมาก ทรงกระบอกกลวงและตันแต่ละชิ้นมีความยาว L_e เท่ากันหมดซึ่งผลที่ได้จะเรียงตัวกันเป็นชั้นความหนา L_e นั่นเอง เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณกำหนดให้รัศมีทรงกระบอกกลวงชิ้นในสุดมีขนาดเท่ากับรัศมีทรงกระบอกตัน r_e และให้ความหนาทรงกระบอกกลวงทุกชิ้นมีขนาด r_e เท่ากันหมด ซึ่งแต่ชิ้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว

3.1 ตัวต้านทานการนำความร้อนในเนื้อวัสดุ

เนื่องจากเป็นการวิเคราะห์ถ่ายเทความร้อนแบบ 1 มิติ ดังนั้นจะไม่มีการถ่ายเทความร้อนในแนวยาวจากต้นท่อมายังปลายท่อของแต่ละชิ้นย่อย เหลือแต่การถ่ายเทความร้อนในแนวรัศมี ค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุมีได้ 2 รูปแบบคือการนำความร้อนในแนวรัศมีทรงกระบอกกลวง และการนำความร้อนในแนวรัศมีทรงกระบอกตัน ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 การถ่ายเทความร้อนในเนื้อวัสดุระหว่างแต่ละชิ้น

3.1.1 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุแนวรัศมีทรงกระบอกกลวง

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวทรงกระบอกแนวที่ n+1 และผิวทรงกระบอกแนวที่ n ในกรอบเส้นประ เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน ได้ค่าดังนี้[4]

$$R_{HCCond,inside\ radial} = \frac{\ln(r_{n+1}/r_n)}{2\pi k L_e} = \frac{\ln[(n+1)/n]}{2\pi k L_e} \quad (7)$$

เมื่อ $R_{HCCond,inside\ radial}$ – ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของทรงกระบอกกลวงในแนวรัศมี(°C/W)

r_{n+1} , r_n - รัศมีด้านนอก และรัศมีด้านใน Element ชนิดทรงกระบอกกลวงที่ n

n - หมายเลขทรงกระบอกกลวง ดูรูปที่ 3

k - สภาพการนำความร้อน (W/m.°C)

L_e - ความยาว Element (m)

3.1.2 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมีทรงกระบอกตัน

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวทรงกระบอกตันแนวที่ 1 และจุดศูนย์กลางทรงกระบอกตันแนวที่ 0 ของรูปที่ 3 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน จะเห็นได้ว่าพื้นที่ผิวของจุดศูนย์กลางทรงกระบอกมีค่าเป็น 0 ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้สูตรการนำความร้อนของทรงกระบอกกลวงได้ ด้วยเหตุนี้จึงกำหนดให้อุณหภูมิที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอกเท่ากับอุณหภูมิที่ผิว นั่นคือความต้านทานความร้อนมีค่าเท่ากับศูนย์ จึงได้ค่าดังนี้

$$R_{SCCond,inside\ radial} = 0 \quad (8)$$

เมื่อ $R_{SCCond,inside\ radial}$ – ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของทรงกระบอกตันในแนวรัศมี(°C/W)

3.2 ตัวเก็บความร้อน

ตัวเก็บความร้อนมีค่าเท่ากับความจุความร้อนของวัสดุ ดังนี้[1]

$$C_t = mC_p = \rho V C_p \quad (9)$$

เมื่อ C_t - ความจุความร้อน(J/°C)

m - มวลวัสดุ(kg)

Cp - ความร้อนจำเพาะ (J/kg.°C)

ρ - ความหนาแน่น (kg/m^3)

V - ปริมาตร(m^3)

ตัวเก็บความร้อนในเนื้อวัสดุมีได้ 2 แบบคือเนื้อทรงกระบอกตันและเนื้อวงแหวนทรงกระบอกกลวง แต่เนื่องจากการคำนวณนี้แบ่งออกเป็น Node ซึ่งเป็นรอยต่อระหว่างทรงกระบอก ดังนั้นจึงแยกตัวเก็บความร้อนออกเป็น 3 ประเภทคือผิวทรงกระบอกกลวงชิ้นนอกสุด, รอยต่อทรงกระบอก และแกนกลางทรงกระบอกตัน

3.2.1 ตัวเก็บความร้อนที่ผิวทรงกระบอกกลวงชิ้นนอกสุด

แบ่งเนื้อจำนวนครึ่งความหนาวงแหวนทรงกระบอกกลวงด้านนอกให้เป็นตัวเก็บความร้อนที่ผิวทรงกระบอกด้านนอกสุด โดยสมมุติให้ชิ้นนอกสุดเป็นชิ้นที่ n จะได้

$$V_{HC,edge} = \pi(r_n^2 - r_{n-1/2}^2)L_e = \pi r_e^2 L_e (n-1/4)$$

$$C_{HC,edge} = \rho\pi r_e^2 L_e C_p (n-1/4) \quad (10)$$

เมื่อ $C_{HC,edge}$ – ความจุความร้อนที่ผิวทรงกระบอกกลวงชิ้นนอกสุด (J/°C)

3.2.2 ตัวเก็บความร้อนที่รอยต่อทรงกระบอก

บริเวณรอยต่อทรงกระบอก ใช้เนื้อวงแหวนทรงกระบอกกลวงด้านในของชิ้นที่ n+1 จำนวนครึ่งความหนา และใช้เนื้อวงแหวนทรงกระบอกกลวงด้านนอกของชิ้นที่ n จำนวนครึ่งความหนาจะได้

$$V_{HC,inside} = \pi(r_{n+1/2}^2 - r_{n-1/2}^2)L_e = \pi r_e^2 L_e (2n)$$

$$C_{HC,inside} = \rho\pi r_e^2 L_e C_p (2n) \quad (11)$$

เมื่อ $C_{HC,inside}$ – ความจุความร้อนที่รอยต่อทรงกระบอก(J/°C)

3.2.3 ตัวเก็บความร้อนที่แกนกลางทรงกระบอกตัน

เนื่องจากได้แบ่งเนื้อที่ผิวทรงกระบอกตันแล้วไปครึ่งหนึ่งให้กับรอยต่อที่ n=1 ดังนั้นจึงเหลือเนื้อสำหรับเก็บความร้อนเพียงครึ่งเดียวของรัศมีทรงกระบอกตัน

$$V_{SC,cen} = \pi\left[\frac{r_e}{2}\right]^2 L_e$$

$$C_{SC,cen} = \rho\pi r_e^2 L_e C_p(1/4) \quad (12)$$

เมื่อ $C_{SC,cen}$ - ความจุความร้อนที่แกนกลางทรงกระบอกตัน(J/^{o}C)

3.3 ตัวต้านทานการพาความร้อน

ตัวต้านทานการพาความร้อนมีค่าดังนี้[4]

$$R_{Conv} = \frac{1}{hA_s} \quad (13)$$

เมื่อ R_{Conv} - ความต้านทานการพาความร้อน (^{o}C/W)

h.. – สัมประสิทธิ์การพาความร้อน (W/m^2.^{o}C)

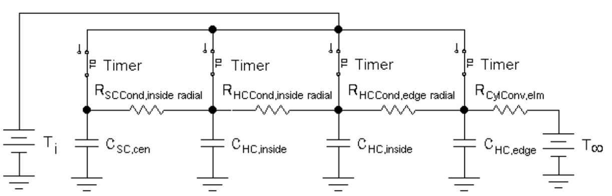
A_s - พื้นที่ผิววัสดุที่สัมผัสกับของไหล (m^2)

$A_s = 2\pi r_o L_e$ m^2

แทนค่า A_s ในสมการ (13)

$$R_{CylConv,elm} = \frac{1}{h2\pi r_o L_e} \quad (14)$$

เมื่อ $R_{CylConv,elm}$ – ความต้านทานการพาความร้อนที่ผิวทรงกระบอก Element (^{o}C/W)



รูปที่ 4 แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนประกอบด้วยทรงกระบอกตันเป็นแกนกลางและทรงกระบอกกลวง 2 ชิ้น อยู่ในของไหล

4.การคำนวณเปรียบเทียบ

เมื่อกำหนดให้แท่งทรงกระบอกอลูมิเนียมมีรัศมี(r_o) 50 mm. และมีความสูงไม่จำกัด มีอุณหภูมิเริ่มต้น(T_i) 200^{o}C มีค่าสภาพการนำความร้อน(k) 237 W/m.^{o}C, ความหนาแน่น(ρ) 2702 kg/m^3 และความความร้อนจำเพาะ(C_p) 903 J/kg.^{o}C ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ(T_∞) 50 ^{o}C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน(h) 500 W/m^2.^{o}C

4.1 คำนวณด้วยทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน

ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1.ตรวจสอบค่า Biot number (Bi) จาก (1)

r_o(รัศมีทรงกระบอก) = 0.05 m

Bi = 0.1054852320675

ค่า Bi มากกว่า 0.1 แสดงว่าอุณหภูมิที่กึ่งกลางเนื้อวัสดุแตกต่างจากบริเวณพื้นผิว

2.ตรวจสอบค่า Fourier number (Fo) จาก (6)

α(การแพร่กระจายความร้อน) = 9.71348896228(10^{-5}) m^2/s

Fo = 3.885395585(10^{-2})t

ดังนั้นจะสามารถคำนวณด้วย Approximate solution (n=1) ได้ เมื่อ Fo > 0.2 ที่ t > 5.14748101254 s

3.คำนวณค่าคงที่ ξ_n จากสมการ (5)

คำตอบสมการมีได้หลายค่า ค่าที่น้อยที่สุดคือ n=1 หรือ ξ_1 ค่ามากถัดไปเป็น n=2 หรือ ξ_2

จากสมการ Trial & error จะได้ค่าเดียวคือ

ξ_1 = 0.4533746319 rad

4.คำนวณค่าคงที่ C จาก (4)

C_1 = 1.025893673

5.หาสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ตำแหน่งลึกจากผิวหน้า(x) 25 mm จาก (3)

r^* = 25/50 = 0.5

$J_o(\xi_1 r^*)$= J_o(0.4533746319*0.5)=0.9871659888

θ^* = 1.012727342Exp(-7.986374555(10^{-3})t)

6.คำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ

ตารางที่ 1 อุณหภูมิที่ระยะลึกจากผิวหน้า 25 mm ตามทฤษฎี

เวลา(s)	θ^*	อุณหภูมิ(^{o}C)
180	0.24053242	86.0798632
240	0.14895920	72.3438794
300	0.09224886	63.8373292
360	0.05712875	58.5693123
420	0.03537923	55.3068849
480	0.02190999	53.2864979

4.2 คำนวณด้วยวิธีรีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

สำหรับการคำนวณนี้ใช้โปรแกรมอิเลคทรอนิคส์เวิร์คเบนซ์คำนวณแต่อย่างไรก็ตามสามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอื่นๆคำนวณได้ ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1.แบ่งแท่งอลูมิเนียมที่มีความยาวมากให้มีความยาวเพียง(L_e) 1 m. เป็นหลายๆท่อน แต่จะคำนวณเพียงท่อนเดียวเท่านั้น เนื่องจากมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกท่อน

2.แบ่งทรงกระบอกในแนวรัศมีออกเป็น 16 ระดับความลึกเท่าๆกัน จากผิวหน้าถึงจุดศูนย์กลางทรงกระบอก ได้แกนกลางเป็นทรงกระบอกตัน 1 ชิ้นและทรงกระบอกกลวงซ้อนกันจำนวน 15 ชิ้น

3.คำนวณได้ค่ารัศมีทรงกระบอกตัน(r_e) 50/16=3.125 mm. การเพิ่มรัศมีวงแหวนคงที่ตลอดโดยมีความหนาทรงกระบอกกลวง(r_t=r_1=r_e) 3.125 mm. ทุกชิ้น

4.คำนวณรัศมีทรงกระบอกทุกๆชิ้น จะได้

r_2=r_1+r_t=2r_e=6.25mm.,

r_3=r_1+2r_t=3r_e=9.375mm.,…,

r_{16}=r_1+15*r_t=16r_e=50 mm.

5.การคำนวณหาค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมีของแต่ละชิ้นย่อย จาก(8) $R_{SCCond0-1,inside\ radial}$=0 ^{o}C/W จาก(7)

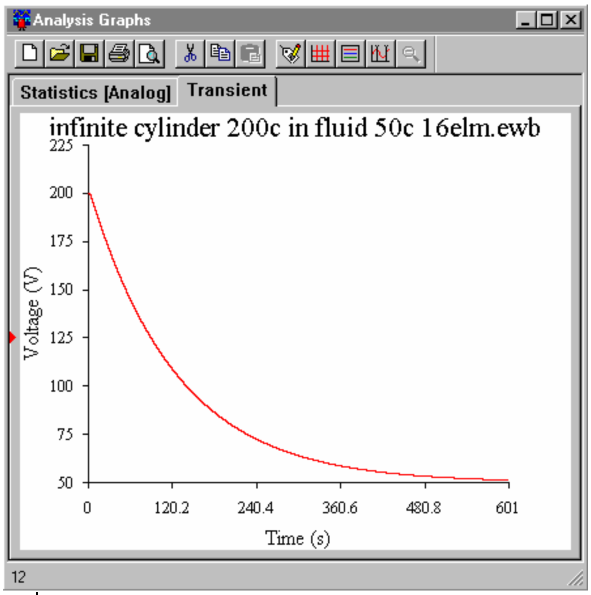
เช่น $R_{HCCond1\text{-}2,inside\ radial}$=4.654759498($10^{-4}$) °C/W, $R_{HCCond15\text{-}16,inside\ radial}$=4.334018843($10^{-5}$) °C/W

6.คำนวณหาค่าความต้านทานการพาความร้อนจาก(14) จะได้ $R_{CylConv,elm}$=6.366197723(10^{-3}) °C/W

7.คำนวณค่าตัวเก็บประจุของแต่ละชิ้นย่อยที่ได้แบ่งไว้ จาก(12) $C_{SC0,cen}$=18.71384464 J/°C จาก(11) เช่น $C_{HC1,inside}$=149.7107571 J/°C, $C_{HC15,inside}$=2245.661357 J/°C จาก(10) $C_{HC16,edge}$=1178.972212 J/°C

8.เขียนตัวต้านทานและตัวเก็บประจุลงใน Work sheet ของโปรแกรมอิเลคทรอนิคส์เวิร์คเบนซ์ จากรูปที่ 4 ในรูปได้ใส่ตัว Timer switch 1 วินาทีไว้ เพื่อตั้งค่าสภาวะอุณหภูมิเริ่มต้น(T_i) หลังจาก 1 วินาทีแล้วการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเนื้อวัสดุจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของไหล(T_∞)

9.ใช้โปรแกรมคำนวณการเปลี่ยนแปลงค่าความต่างศักดิ์ไฟฟ้า(V) โดยเลือกการวิเคราะห์แบบ Transient ซึ่งค่าที่ได้นี้คือการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ(T)เมื่อเวลาผ่านไปนั่นเอง โดยกำหนดจุดที่จะหาการเปลี่ยนแปลงอยู่ที่ความลึกจากผิวหน้า 25 mm คือที่รอยต่อระหว่างตัวต้านทานที่ 8 กับ 9 (n=8) ตั้งเวลาสิ้นสุดการวิเคราะห์ถึงวินาทีที่ 601 ในระหว่างการคำนวณโปรแกรมจะเขียนกราฟแสดงการการเปลี่ยนแปลงศักย์ไฟฟ้า(V)หรืออุณหภูมิ(T) แสดงดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 ผลการคำนวณด้วยโปรแกรมอิเลคทรอนิคส์เวิร์คเบนซ์ จากเวลา 0 ถึง 601 วินาที

ซึ่งจะอ่านค่าอุณหภูมิจากกราฟได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 อุณหภูมิที่ระยะลึกจากผิวหน้า 25 mm จากโปรแกรม

เวลา(s)	อุณหภูมิ(°C)
1+180	86.6515837
1+240	72.3981901
1+300	63.9140272
1+360	58.8235294
1+420	55.4298643
1+480	53.3936652

5. วิเคราะห์ผล

หาค่าความผิดพลาดที่แตกต่างจากทฤษฎี(%Error) โดยนำตารางที่ 2 มาหาค่าแตกต่างจากตารางที่ 1 ได้ค่าความผิดพลาดดังนี้

ตารางที่ 3 แสดงค่าความผิดพลาดของอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ

เวลา(s)	Error(%)
180	0.664174475
240	0.075072902
300	0.120145863
360	0.434044895
420	0.222358157
480	0.201115168

จะเห็นได้ว่าเป็นค่าความผิดพลาดที่น้อยมาก สำหรับเวลาที่มากกว่า 601 s นั้น อุณหภูมิจะเข้าใกล้ T_∞ มากยิ่งขึ้น

แต่อย่างไรก็ตามสูตรที่ใช้ในการคำนวณทางทฤษฎีเองก็เป็นการประมาณการเท่านั้นเนื่องจากไม่สามารถแก้สมการ Differential ได้โดยตรง จึงมีการใช้ Bessel function มาช่วยแก้สมการซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เป็นค่าโดยประมาณเท่านั้น

6. สรุป

เมื่อกำหนดให้แท่งทรงกระบอกอลูมิเนียมมีรัศมี 50 mm. และมีความสูงไม่จำกัด มีอุณหภูมิเริ่มต้น 200°C มีค่าสภาพการนำความร้อน 237 W/m.°C, ความหนาแน่น 2702 kg/m^3 และความความร้อนจำเพาะ 903 J/kg. °C ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ 50 °C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน 500 W/m^2.°C เมื่อคำนวณอุณหภูมิที่ระยะลึกจากผิวหน้า 25 mm. ด้วยโปรแกรมโดยให้เวลาผ่านไป 360 วินาที ปรากฏว่ามีความผิดพลาด 0.43 % จากทฤษฎี แต่อย่างไรก็ตามสูตรที่ใช้ในการคำนวณทางทฤษฎีเองก็เป็นการประมาณการเท่านั้นเนื่องจากไม่สามารถแก้สมการ Differential ได้โดยตรง

จากค่าความผิดพลาดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองคณิตศาสตร์ชิ้นส่วนทรงกระบอกที่มีตัวต้านทานและตัวเก็บประจุเป็นจำนวนมากนี้สามารถคำนวณโดยทฤษฎีวงจรไฟฟ้าที่ให้คำตอบที่น่าเชื่อถือได้ ซึ่งจะเป็นการง่ายในการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางไฟฟ้าคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยนไปตามเวลาที่มีความซับซ้อนของเนื้อวัสดุต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] ประเสริฐ อินประเสริฐ, พ.ศ. 2547. การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิของวัตถุทรงกลมที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อสม่ำเสมอ ด้วยวิธีรีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 18, หน้า 953-956

[2] ประเสริฐ อินประเสริฐ, พ.ศ. 2548. การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิภายในผนังด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 19, หน้า 1169-1173

[3] Frank P. Incropera, David P. DeWitt, 2002. Introduction to Heat Transfer, Fourth edition, Purdue University, U.S.A., John Wiley&Sons.Inc, pp 254-256,260,849

[4] Frank W. Schmidt, Robert E. Henderson, Carl H. Wolgemuth, 1993. Introduction to Thermal Sciences, Second edition, The Pensylvania State University, U.S.A., John Wiley&Sons.Inc, Singapor, pp 388,430

[5] Martin Marz,Paul Nance, 2000. Thermal Modeling of Power-electronic Systems, Fraunhofer Institute for Integrated Circuit, http://www.iisb.fraunhofer.de/de/arb_geb/pub_les/02_00.pdf, (accessed on Oct 2005)

[6] Satish P. Ketkar,Ph.D, 1999. Numerical thermal analysis, The MacNeal-Schwendler Corporation, U.S.A., ASME Press, New York, pp 59-70

[7] Yunus A. Cengel, 1998. Heat Transfer a Practical Approach, University of Nevada. Reno, U.S.A., McGraw-Hill. Inc, pp 228-229,233-234,237