แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบควบคุมแบบวงรอบปิด

Mathematical model construction by closed- loop system Identification technique

ประพนธ์ ภาคี วรัญญู[1*] สินชัย ชินวรรัตน์[2]

[1, 2]ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ 1518 ถนนพิบูลสงคราม บางซื่อ กรุงเทพฯ 10800

โทร 02-9132500 ต่อ 8308 โทรสาร 02-25870026 *อีเมล์ ppwu9074@yahoo.com[1] อีเมล์ sch@kmit.ac.th[2]

Praphon Parkee Whran-U[1*], Sinchai Chinvoratat [2]

[1,2]School of Mechanical Engineering, Institute of Technology of North Bangkok 1518 Pibulsongkram rd. Bangsue Bangkok 10800 Thailand

Tel: 02-9132500 ext 8308, Fax: 02-25870026 , *E-mail: ppwu9074@yahoo.com[1] E-mail: sch@kmit.ac.th[2]

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการแก้ปัญหาหรือออกแบบระบบ โดยวิธีการนี้เป็นวิธีการใช้เทคนิควิธีที่รวบรวมเอาข้อมูลอินพุท-เอาท์พุท ที่เก็บรวบรวมมาจากการทดลองจริง แล้วนำเอามาเข้าสู่วิธีการสร้างเป็นรูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์ เทคนิควิธีดังกล่าวจะใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป เพื่อให้ได้โปรแกรมใช้งานที่สามารถเจาะจงระบบ (System Identification) หรือให้ได้ระบบสมการคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) และทั้งสามารถวิเคราะห์ระบบควบคุม ทำนายระบบควบคุม และแม้กระทั่งออกแบบระบบควบคุมได้โดยจะให้ผลออกมาเป็นระบบสมการคณิตศาสตร์(Mathematical Model)โดยระบบที่สนใจเป็นระบบควบคุมแบบวงรอบปิด(Closed-Loop System) ที่มีตัวควบคุมการป้อนกลับ (Feedback Controller) แล้วแสดงผลที่ได้ออกมาด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์(Mathematical Model Identification) ของระบบ โปรแกรมที่ได้ออกแบบและทดลองจะเป็นโปรแกรมที่สามารถใช้งานได้จริง

Abstract

This Thesis presents the algorithm of Closed-Loop System Identification (CLID).A development computer programming is written to verify the concept of CLID.This method show an advantage of system Identification especially an unstable system with a Closed-Loop Controller Dynamic. The Identification Model from CLID method is “Closed” to the actual model even the presents of process noise.

คำสำคัญ การทำนายเอกลักษณ์ของระบบวงรอบปิด,การเจาะจงระบบ

1. บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยเพื่อการวิธีในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์(Mathematical Model) ของระบบทางกล ซึ่งมีวิธีการเรียกชื่อได้หลายอย่างเช่น การเจาะจงระบบ การทำนายเอกลักษณ์ ซึ่งมีที่มาจากคำภาษาอังกฤษเดียวกันว่า System Identification แต่มีความหมายและวิธีการเช่นเดียวกันกล่าวคือ เป็นการหาสมการทางคณิตศาสตร์ให้กับระบบทางกลระบบใดระบบหนึ่ง(Plant)ที่กำลังสนใจอยู่ โดยระบบนั้นถูกกระตุ้นด้วยอินพุทที่มาจากภายนอกและให้ผลตอบสนองเป็นเอาท์พุทออกมา ความจำเป็นที่ต้องทำออกมาให้ได้ก็คือรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของ Plant นั้นคืออะไร มีความสัมพันธ์กันทางตัวแปรด้วยค่าอะไร

ในทางวิศวกรรมศาสตร์การควบคุม ได้มีการคิดสร้างรูปแบบในการวิเคราะห์ ศึกษาระบบทางวิศวกรรมขึ้นอีกวิธีหนึ่งนอกเหนือไปจากการใช้วิธีวิเคราะห์จากสมการพื้นฐานที่ใช้กฏเกณฑ์ทางฟิสิกส์ หรือที่เรียกว่า Analytical Approach โดยในวิธีที่ใช้ในงานวิจัยนี้ได้ใช้เทคนิควิธีที่รวบรวมเอาข้อมูล อินพุท-เอาท์พุท ที่เก็บรวบรวมมาจากการทดลองจริง แล้วนำเอามาเข้าสู่วิธีการสร้างเป็นรูปแบบทางคณิตศาสตร์หรือทำให้ออกมาเป็นสมการทางคณิตศาสตร์หรือแบบจำลองคณิตศาสตร์(Mathematical Model) หรือที่เรียกว่าการเจาะจงระบบ (System Identification) ซึ่งผลที่ได้จะทำให้ได้แบบจำลองของระบบที่เป็นรูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ได้ตรงตามระบบที่ได้ทำการทดลองและเป็นระบบที่ให้ความสนใจ และรูปแบบทางคณิตศาสตร์นี้จะอยู่ในรูปโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ที่จะสามารถนำมาใช้ในการคำนวณ การทำนายระบบ การวิเคราะห์ระบบ และให้แสดงผลในทางการวิเคราะห์ได้หลายทาง เช่นแสดงผลเป็นกราฟ หรือเป็นตัวเลขข้อมูล อันจะเป็นประโยชน์ต่อการทำงานด้านวิศวกรรมควบคุม สามารถนำไปใช้พยากรณ์ระบบได้ ด้วยวิธีการอันนี้ยังสามารถนำไปใช้ได้กับแขนงวิชา

อื่นได้อีกมากมายเช่นทางด้านเศรษฐศาสตร์ การควบคุมการผลิตทางอุตสาหกรรม วิศวกรรมสาขาอื่นๆ

ก่อนหน้านี้ได้มีผู้ทำการวิจัยและนำเสนอผลงานเรื่องออปเซิฟเวอร์/คอนโทรลเลอร์ไอเด็นติฟิเคชั่น(Observer/Controller Identification) [1] ซึ่งเป็นการเจาะจงระบบหรือทำนายเอกลักษณ์ของระบบวงรอบปิดซึ่งมีสัญญาณควบคุมป้อนกลับจากตัวควบคุม เมื่อระบบวงรอบปิดถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณที่ทราบค่า และทำการบันทึกข้อมูลเชิงเวลาของผลตอบสนองของระบบวงรอบปิด และสัญญาณควบคุมป้อนกลับ (Feedback Control Signal)

มีผู้นำเสนองานวิจัย เรื่องการเจาะจงเสตทเสปซระบบจากผลตอบสนองข้อมูลเชิงความถี่จากระบบวงรอบปิด (State-Space System Identification from Closed-Loop Frequency Response Data) [2] ซึ่งเป็นงานวิจัย เกี่ยวกับเรื่องการเจาะจงระบบด้วยรูปแบบของแบบจำลองที่เป็น เสตทเสปซเชิงเส้นจากข้อมูลผลตอบสนองเชิงความถี่จากระบบวงรอบปิดที่ทราบค่าผลตอบสนองทางพลศาสตร์(Feedback Dynamic) เชิงความถี่ของตัวควบคุม ก่อนหน้านี้มีผู้คิดทำการวิจัยและนำเสนอผลงาน เรื่องการปรับปรุงกระบวนการหาเอกลักษณ์ของระบบด้วยไว้ท์ค่าเรสิดุล [3] ซึ่งเป็นวิจัยเกี่ยวกับการปรับปรุงการหาเอกลักษณ์ของระบบวงจรปิดโดยวิธีการมินิไมซ์ และไว้ท์ค่าเรสิดุลของ ARMAX โมเดลถูกแสดงไว้ซึ่งได้แสดงถึงคุณภาพของระบบ การหาเอกลักษณ์ที่เพิ่มขึ้น และผลการทดสอบเชิงตัวเลขของระบบการลอยตัวของระบบด้วยสัญญาณแม่เหล็กไฟฟ้าได้ถูกแสดง เพื่อยืนยันการปรับปรุงการหาเอกลักษณ์ และเพื่อเพิ่มความถูกต้องในการหาเอกลักษณ์ของระบบให้มากขึ้น และได้มีผู้คิดทำงานวิจัยและเสนอผลงานวิจัยเรื่องการทำนายเอกลักษณ์ของระบบด้วยเทคนิควิธี Observer Kalman System Identification(OKID) [4] เป็นการใช้วิธีการทำนายเอกลักษณ์ของระบบหรือการสร้างสมการคณิตศาสตร์(Mathematical model)ให้กับระบบที่เป็นแบบวงรอบเปิด(Open Loop System) โดยสมการของระบบเป็นสมการในเงื่อนไขของสมการเชิงเส้น และไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Discrete) ฉะนั้นระบบที่ทำการทดลองนั้นจะเป็นระบบที่มีเสถียรภาพและควบคุมได้ในตัวเอง(Non Controller) แต่ระบบ OKID ไม่สามารถนำมาใช้กับระบบแบบไม่เสถียรได้ หรือจะนำมาใช้กับระบบวงรอบปิดได้ เมื่อระบบใดๆที่กำลังศึกษาอยู่ไม่เสถียรจึงต้องมีวงจรควบคุม (Controller) จึงทำให้ทั้งระบบกลายเป็นวงรอบครบ Loop ซึ่งจะต้องใช้สมการเชิงเส้นอีกระบบหนึ่งในการวิเคราะห์ วิธีการดังกล่าวที่จะได้นำเสนอในงานวิจัยนี้เรียกว่าการเจาะจงระบบวงรอบปิด(Closed–loop System Identification :CLID)

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

งานวิจัยนี้จะเป็นการพัฒนาและการสร้างแบบจำลองของระบบขึ้นมาจากที่มีงานวิจัยเรื่องแบบจำลอง ทางคณิตศาสตร์หรือการเจาะจงระบบของระบบวงรอบเปิด (Open-loop System Identification:OKID) โดยในงานวิจัยนี้เป็นสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์หรือการเจาะจงระบบของระบบวงรอบปิด (Closed–loop System Identification :CLID) กล่าวคือระบบที่จะใช้ในการพัฒนาขึ้นมานี้เป็นระบบที่มี Controller ซึ่งจะทำหน้าที่เป็นตัวสร้าง Input เข้าไปในระบบซึ่งมุ่งหวังผลที่ได้คือรูปแบบคณิตศาสตร์ของระบบสมการ(Mathematical Model) ของระบบแบบที่มี Controller ในการควบคุมเสถียรภาพของระบบ

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้

1.3.1 สามารถนำไปใช้สร้างสมการทางคณิตศาสตร์ หรือการเจาะจงระบบ หรือการวิเคราะห์ระบบ หรือสร้างระบบ(Plant) ให้ได้เอาท์พุทให้เป็นไปตามความต้องการ หรือการเจาะจงเอกลักษณ์ของระบบทางกลใดๆ ก็ได้หรือระบบที่มีความซับซ้อนอย่างไรก็ได้ ที่ตัวแปรมีความสัมพันธ์กันแบบสมการเชิงเส้นและเป็นสมการแบบ Auto Regressive with eXogenous (ARX)

1.3.2 สามารถนำไปใช้สร้างสมการทางคณิตศาสตร์ หรือสร้างความสัมพันธ์ในรูปแบบสมการเชิงคณิตศาสตร์ของศาสตร์สาขาอื่น ๆ เช่นเศรษฐศาสตร์ กระบวนการผลิต หากว่าตัวแปรมีความสัมพันธ์กันแบบสมการเชิงเส้น

1.3.3 นำไปใช้ในการออกแบบระบบในการใช้งานจริง

1.4 งานวิจัยที่มีผู้ทำไว้แล้ว

1.4.1 Juang [1] ได้ทำการวิจัยและนำเสนอผลงานเรื่อง Observer /Controller Identification ซึ่งเป็นการเจาะจงระบบหรือทำนายเอกลักษณ์ของระบบวงรอบปิด ซึ่งมีสัญญาณควบคุมป้อนกลับจากตัวควบคุม เมื่อระบบวงรอบปิดถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณที่ทราบค่าและทำการบันทึกข้อมูลเชิงเวลาของผลตอบสนองของระบบวงรอบปิด และสัญญาณควบคุมป้อนกลับ(Feedback Control Signal)

1.4.2 Huang et al [2] การเจาะจงเสตทเสปซระบบ จากผลตอบสนองข้อมูลเชิงความถี่จากระบบวงรอบปิด (State-Space System Identification From Closed-Loop Frequency Response Data)

1.4.3 สินชัย [3] ได้ทำการศึกษาการออกแบบ สัญญาณอินพุทสำหรับการหาเอกลักษณ์ กระบวนการหาเอกลักษณ์ของระบบซึ่งโดยทั่วไปจะใช้สัญญาณแบบสุ่มเป็นสัญญาณอินพุทของระบบ โดยสัญญาณอินพุทจะเป็นสัญญาณเกาเส้นท์ มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ซึ่งในงานวิจัยได้ได้นำเสนอสัญญาณอินพุทแบบใหม่ ทำให้เพิ่มความถูกต้องในการหาเอกลักษณ์ของระบบมากยิ่งขึ้น ผลจากการทดสอบเชิงตัวเลขได้ว่าความไวต่อสัญญาณรบกวนมีค่าน้อยลง ซึ่งทำให้แบบ จำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น ถึงแม้ระบบจะอยู่ภายใต้สัญญาณรบกวนสูง

1.4.4 มานะ [4] ได้ทำการศึกษาและได้ประยุกต์ใช้เทคนิคออฟเซิฟเวอร์ คาลมาน ฟิลเตอร์ (Observer Kalman Filter :OKID)ในการทำนายเอกลักษณ์ของระบบโดยสร้างแบบจำลองระบบทางคณิตศาสตร์ของระบบรองรับรถยนต์ เป็นระบบวงรอบเปิด และสร้างโปรแกรม OKID เพื่อใช้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ผลของค่าไอเก็นแวลู (Eigen Value: eig) และการตอบสนองจากระบบที่ได้ ระหว่างแบบจำลองที่สร้าง กับแบบจำลองที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

1.5 ขอบเขตของงานวิจัย

พัฒนารูปแบบหรือสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อการวิเคราะห์ระบบทางพลศาสตร์ เพื่อให้สามารถสร้างสมการทางคณิตศาสตร์หรือ

เจาะจงระบบ (System Identification) ด้วยรูปสมการทางคณิตศาสตร์ให้เห็นความสัมพันธ์ของตัวแปร Input,Output ด้วยระบบสมการทางคณิตศาสตร์ โดยระบบที่สนใจและนำมาทดลองนั้นเป็นระบบวงรอบปิด (Closed-Loop) คือระบบที่มี Controller และโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสำเร็จนั้นจะต้องนำไปใช้ได้จริงกับระบบอื่น

2. อัลกอลิทึมสำหรับการสร้างระบบ

2.1 บทนำ

การทำนายเอกลักษณ์ของระบบ(System Identification)เป็นวิธีการทำนายเอกลักษณ์ หรือการสร้างรูปสมการของสมการทางคณิตศาสตร์(Mathematical Model) ให้กับระบบทางกล(Plant)ที่นำมาใช้ทดลอง โดยอาศัยข้อมูลอินพุท-เอาท์พุท ที่ได้จากการกระตุ้นระบบ การทำนายเอกลักษณ์หรือการสร้างรูปสมการของสมการทางคณิตศาสตร์(Mathematical Model) โดยใช้เทคนิควิธีแบบตัวสังเกตการณ์คาลมาน(Observer Kalman Identification :OKID) [2] นั้นจะใช้ได้ก็แต่กับระบบที่มีเสถียรภาพ กล่าวคือเป็นระบบที่ทำงานได้โดยไม่ต้องใช้ Controller หรือระบบที่เป็นระบบเปิด(Open Loop) เท่านั้น แต่ในงานวิจัยนี้เป็นการพัฒนารูปแบบการทำนายเอกลักษณ์หรือการเจาะจงระบบขึ้นมา เพื่อที่จะให้สามารถใช้ได้กับระบบที่เป็นวงรอบปิด(Closed-Loop Identification :CLID) คือมี Controller ดังนั้นตัวระบบที่จะถูกทดลอง(Plant)จะมีเสถียรภาพหรือไม่ก็ได้ ก็สามารถจะนำเอาวิธีทำนายเอกลักษณ์หรือการเจาจงระบบแบบวงรอบปิดไปทำนายเอกลักษณ์หรือเจาะจงระบบได้ทั้งสิ้น

การหาเอกลักษณ์ของระบบหรือการเจาะจงระบบแบบตัวสังเกตการณ์คาลมาน(Observer Kalman Identification :OKID) ใช้ระบบสมการต้นแบบ โดยมีข้อกำหนดเพื่อให้เหมะสมกับการเก็บข้อมูลว่า แบ่งเวลาเป็นช่วงๆ(Discrete Time) และไม่ขึ้นต่อเวลานี้ จึงมีรูปแบบของระบบสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร Input–Output ให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้น และมีรูปแบบของสมการต้นแบบเชิงเส้นที่จะนำมาใช้ในที่นี้คือ

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \kappa_k$$
$$y_k = C_c \eta_k + \upsilon_k$$

ซึ่งเป็นรูปแบบสมการที่จะนำมาใช้ทั้งระบบวงรอบเปิด(OKID) และวงรอบปิด (CLID) ดังรายละเอียดที่จะกล่าวต่อไป และเมื่อระบบวงรอบปิด คือมี Controller ก็จะมีสมการสำหรับ Controller ดังนี้

$$p_{k+1} = A_d p_k + B_d y_k$$
$$u_k = C_d p_k + D_d y_k + r_k$$

2.2 รูปแบบโครงสร้างระบบสมการที่จะนำไปสู่การเจาะจงระบบแบบวงรอบปิด หรือการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบ (Closed-Loop System Identification

จากที่กล่าวไว้แล้วก็คือรูปแบบของระบบสมการที่จะใช้ในงานวิจัยนี้จะนำเอารูปแบบสมการที่เป็น Auto Regressive with eXogenous(ARX) ดังนั้นกำหนดให้สมการของระบบคือ

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \kappa_k \qquad (1)$$
$$y_k = C_c \eta_k + \upsilon_k \qquad (2)$$

ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงเส้น , มีมิติที่จำกัด,แบ่งเวลาเป็นช่วงๆ (Discrete time),เป็นระบบที่แปรผันตามเวลา

เมื่อ $x_k \in R^{nx1}$ คือเสตทเวคเตอร์ , $u_k \in R^{sx1}$ เป็นอินพุทเวคเตอร์, $y_k \in r^{mx1}$ เป็นเอาท์พุทเวคเตอร์ $[A,B,C]$ เป็น เสตทสเปซเมตริกซ์ ของระบบ κ_k คือสัญญาณรบกวนที่เกิดในระบบ และ υ_k คือสัญญาณรบกวนที่ตรวจวัดได้จากเอาท์พุท สัญญาณรบกวนนี้จะถูกสมมติว่า เป็นเกาส์เซียน, ไวท์, มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ มีค่าความแปรปรวนเป็น Q และ R ตามลำดับ

เมื่อทำการอนุพันธ์สมการ (2-22) และ(2-23) โดยใส่ตัวกรองที่เป็นสภาวะคงตัว(Steady State Flter) เข้าไป ก็จะได้รูปสมการระบบเป็น

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + AK\varepsilon_k \qquad (3)$$
$$y_k = C\hat{x}_k + \varepsilon_k \qquad (4)$$

เมื่อ $\hat{x}_k$ เป็นค่าประมาณสภาวะของระบบ,K คือค่าGain ตัวกรองคาลมานที่สภาวะคงตัว(Steady State Kalman Filter Gain) และ ε_k คือสัญญาณรบกวนที่ยังตกค้างหลังจากกรองออกไปแล้ว $(\varepsilon_k = y_k - C\hat{x}_k)$ สภาพความมีอยู่ของ K ระบบจะสามารถตรวจวัดได้ และค่า A , $Q^{1/2}$ มีเสถียรภาพ

รูปสมการ (2-22) ถึง (2-25) เป็นสมการที่นำไปใช้ในการสร้างระบบแบบวงรอบเปิด ต่อไปจะทำการพัฒนาไปสู่การเจาะจงระบบแบบวงรอบปิด ซึ่งต้องมี Controller ซึ่งเอาท์พุทของ Controller จะทำหน้าที่เป็นอินพุทของระบบ จึงต้องอาศัยรูปสมการของ Controller ซึ่งในที่นี้จะกำหนดให้เป็น

$$p_{k+1} = A_d p_k + B_d y_k \qquad (4)$$
$$u_k = C_d p_k + D_d y_k + r_k \qquad (5)$$

โดยที่ A_d, B_d, C_d, D_d คือเมตริกซ์ระบบของ Controller ซึ่งจะกลายเป็นอินพุท ของระบบที่จะไปควบคุม , p_k คือ ตัวแปรสภาวะ(State Matrix)ของ Controller และ r_k คืออินพุทของระบบวงรอบปิด

ต่อไปจัดสมการ (2-24) ถึง (2-27) ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$\eta_{k+1} = A_c \eta_k + B_c r_k + A_c K_c \varepsilon_k \qquad (6)$$
$$y_k = C_c \eta_k + \varepsilon_k \qquad (7)$$

โดยที่ $\eta_{kj} = \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ p_k \end{bmatrix}$ $A_c = \begin{bmatrix} A + BD_d C & BC_d \\ B_d C & A_d \end{bmatrix}$

, $B_c = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$ $A_c K_c = \begin{bmatrix} AK + BD_d \\ B_d \end{bmatrix}$

$$C_c = [C] \qquad (8)$$

โดยที่ K_c คือ Kalman Filter Gain ของระบบวงรอบปิด ความมีอยู่ของค่า K_c ยังจะบอกถึงความแน่นอนของเมตริกซ์ A_c ว่าเป็น Nonsingular

ต่อจากนั้นแทนสมการ(7 ลงใน สมการ(8) ก็จะได้

$$\eta_{k+1} = \overline{A}\eta_k + B_c r_k + A_c K_c y_k \quad (9)$$

หากว่าค่า K_c สามารถจะมีอยู่จริงและหาค่าได้แล้ว ค่า $\overline{A} = A_c - A_c K_c C_c$ ก็สามารถจะยืนยันได้ว่าเป็นค่าที่เสถียรและมีลักษณะสมมาตร

จากนั้นทำการแปลง Z-Transform สมการ (6) และ (7) จะได้รูปสมการ

$$\eta_{(Z)} = (z - \overline{A})^{-1}\left[A_c K_c y_{(z)} + B_c r_{(z)}\right] \quad (10)$$

$$y_{(z)} = C_c \eta_{(z)} + \varepsilon_{(z)} \quad (11)$$

นำสมการ(2-32)แทนลงในสมการ(233)

$$y_{(z)} = C_c (z - \overline{A})^{-1}\left[A_c K_c y(z) + B_c r(z)\right] + \varepsilon(z) \quad (12)$$

แล้ว Inverse z- Transform สมการ (2-34)โดยที่

$$(z - \overline{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{A}^{i-1} z^{-i}$$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้นที่ 0 จะได้สมการ

$$y_k = \sum_{i=1}^{\infty} C_c \overline{A}^{i-1} A_c K_c y_{k-i} + \sum_{i=1}^{\infty} C_c \overline{A}^{i-1} B_c r_{k-i} + \varepsilon_k \quad (13)$$

เมื่อ $\overline{A}$ เป็นเมตริกซ์สมมาตรอย่างเสถียรภาพ, $\overline{A}^i \approx 0$ หากว่า $i \rangle p$ โดยที่ p มีขนาดที่ใหญ่เพียงพอ สมการ (13) จะกลายเป็น

$$y_k \approx \sum_{i=1}^{p} c_i y_{k-i} + \sum_{i=1}^{p} d_i r_{k-i} + \varepsilon_k \quad (14)$$

โดยที่

$$c_i = C_c \overline{A}^{i-1} A_c K_c \text{ และ } d_i = C_c \overline{A}^{i-1} b_c \quad (15)$$

สมการที่ (14)เป็นสมการที่อยู่ในรูปแบบ ของ Auto Regressive eXogenous (ARX) ซึ่งแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของอินพุท เอาท์พุทในระบบวงรอบปิดเมตริกซ์สัมประสิทธิ c_i และ d_i สามารถหาค่าประมาณได้จากวิธีการ Least –Square Method โดยอาศัยการเก็บข้อมูลแบบสุ่มจาก r_k จากจำนวนข้อมูล

การหาผลเฉลยจาก Batch Least–Square มาจากสมการ

$$\theta_{clid} = Y\Phi_{clid}^{T}(\Phi_{clid}\Phi_{clid}^{T})^{-1} \quad (16)$$

โดยที่

$$Y = \left[y_0 y_1 \ldots.. y_p \ldots. y_{N-1}\right],$$

$$\theta_{clid} = \left[d_1 c_1 \ldots d_p c_p\right] \quad (17)$$

$$\Phi_{clid} = \begin{bmatrix} 0 & r_0 & \cdots & r_{p-1} & \cdots & r_{N-2} \\ 0 & y_0 & \cdots & y_{p-1} & \cdots & y_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & r_0 & \cdots & r_{N-p-1} \\ 0 & 0 & 0 & y_0 & \cdots & y_{N-p-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

จาก Z-Transform ของสมการ (3) ซึ่งเป็นเสตทสเปซ ระบบวงรอบเปิด สามารถจะนำมาทำการอนุพันธ์เพื่อหาค่า $u(z), y(z)$ จะได้

$$\hat{x}(z) = (z - A)^{-1}\left[Bu(z) + AK\varepsilon(z)\right] \quad (19)$$

นำสมการ (18) ไปแทน Z-Transform ในสมการ (19) จะได้

$$y(z) = C(z - A)^{-1}\left[Bu(z) + AK\varepsilon(z) + \varepsilon(z)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} Y_s(k) z^{-k} u(z) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(k) z^{-k} \varepsilon(z) \quad (20)$$

ในที่นี้ $Y_s(k) = CA^{k-1}B$ คือ Markov Parameter ของระบบสมการวงรอบเปิด และ

$Y_k(k) = CA^{k-1}AK$ คือ Kalman filter Markov Parameter และ $Y_k(0) = I$ เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ ในทำนองเดียวกัน นำสมการ (4) ซึ่งเป็น Controller Output Feedback คือสมการ $p_{k+1} = A_d p_k + B_d y_k$ ไปแทนลงในสมการ (5) คือสมการ

$$u_k = C_d p_k + D_d y_k + r_k$$

จะได้สมการ

$$u(z) = \sum_{K=0}^{\infty} Y_D(k) z^{-k} y(z) + r(z) \quad (21)$$

นำสมการ(10) แทนลงใน (11) จะได้

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_{sc}(k) z^{k} u(z) + \sum_{k=0}^{\infty} Y_{KC}(k) z^{-k} \varepsilon(z) \quad (22)$$

เมื่อ $Y_D(k) = C_d A_d^{k-1} B_d$ คือ Controller Markov Parameter และ $Y_{SC}(k) = C_c A_c^{k-1} B_c$ เป็น Closed-Loop System Markov Parameter และ $Y_{KC}(k) = C_c A_c^{k-1} A_c K_k$ Closed-loop Kalman Filter Markov Parameter โปรดสังเกตว่า $Y_D(0) = D_d$ และ $Y_{KC}(0) = I$

ทำการ Z-Transform สมการ (14) จะได้

$$\left(I - \sum_{i=1}^{p} c_i z^{-1}\right) y(z) = \sum_{i=1}^{p} d_i z^{-i} r(z) + \varepsilon(z) \quad (23)$$

เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับสมการ (21) ระบบวงรอบปิด และ Kalman Filter Markov Parameter สามารถจะคำนวณออกมาได้โดยการการประมาณค่าจากเมตริกซ์ สัมประสิทธิ ของARX

$$Y_{SC}(k) = d_k + \sum_{i=1}^{k} c_i Y_{SC}(k - i) \quad (24)$$

$$Y_{KC}(k)=\sum_{i=1}^{k}c_i Y_{KC}(k-i) \qquad (25)$$

โดยที่ $Y_{SC}(0)=0, Y_{KC}(0)=I,$ และ $c_i = d_i = 0$ เมื่อ $i \rangle p$

The Open-Loop System Markov Parameter $Y_s(k)$ และ Kalman Filter Markov Parameters $Y_k(k)$ หาได้โดยการแทนค่าสมการ (20) ลงในสมการ (21) ได้

$$y(z)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}Y_S(k)z^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}Y_D(k)z^{-k}y(z)\right)+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}Y_S(k)z^{-k}r(z)+\sum_{k=0}^{\infty}Y_K(k)z^{-k}\varepsilon(z)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k(k)z^{-k}y(z)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}Y_s(k)z^{-k}r(z)+\sum_{k=0}^{\infty}Y_K(k)z^{-k}\varepsilon(z)$$

(22)

เมื่อ $\delta_k = \sum_{i=1}^{k}Y_S(i)Y_D(k-i)$

โดยการแยกส่วนสมการ(2-48) แล้วทำการเปรียบเทียบกับสมการ(2-43) Closed -Loop System Markov Parameter สามารถจะทวนอธิบายในรูปแบบของ Open-Loop System Markov Parameters และ Controller Markov Parameter $Y_D(k)=C_d A_d^{k-1}B_d$

$$Y_{SC}(j)=Y_S(j)+\sum_{k=1}^{j}\delta_k Y_{SC}(j-k)=Y_s(j)+\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{k}Y_S(i)Y_D(k-i)Y_{SC}(j-k)$$

(23)

Kalman Filter Markov Parameters ของระบบวงรอบปิดสามารถจะทวนอธิบายในเทอมของ Kalman Filter Markov Parameters ในระบบวงรอบเปิด และ Controller Markov Parameters

$$=\left(Y_K(j)+\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{k}Y_s(i)Y_D(k-i)Y_{KC})j-k)\right) \qquad (24)$$

นำสมการ (22) และ(23) มาจัดรูปใหม่ได้

$$Y_S(j)=Y_{SC}(j)-\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{k}Y_S(i)Y_D(k-i)Y_{SC}(j-k)$$

(25)

$$Y_K(j)=Y_{KC}(j)-\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{k}Y_S(i)Y_D(k-i)Y_{KC}(j-k)$$

(26)

แบบจำลอง(State Space)ของระบบวงรอบเปิดสามารถจะหาได้โดยใช้วิธีการ Singular-Value Decomposition จาก Hankel Matrix ที่ถูกสร้างขึ้นมาจาก Open-Loop System Markov Parameters ยิ่งไปกว่านั้น Open-Loop Kalman Filter Gain ยังสามารถสร้างขึ้นได้จาก open-loop Kalman filter Markov parameters และเสตทสเปซเมตริกซ์ A, C

ขั้นตอนการเจาะจงระบบวงรอบปิดหรือการสร้าง Mathematical Model ของระบบวงรอบปิด(Closed-Loop System Identification)

1. รวบรวมข้อมูลอินพุท-เอาท์พุท ที่ได้จากการทดลอง แต่การทดลองของงานวิจัยนี้จะใช้วิธีสุ่มค่าจากข้อมูลอินพุท-เอาท์พุท จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีอยู่แล้ว และทดสอบการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

2. ทำการอนุพันธ์(Derive)สมการตั้งต้นคือสมการที่ (1) ถึง (2)

3. ระบบสมการ(2-36) อยู่ในรูปสมการ ARX จากนั้นใช้เทคนิควิธี Least-Square Method ประมาณค่า Model Parameter c_i, d_i โดยใช้ขนาดของ p ที่เหมาะสมโดยใช้สมการ (16)-(18)

4. คำนวนหาค่า Closed-Loop System $Y_{SC}(k)$ และ Kalman Filter Markov Parameters $Y_{KC}(k)$ จากการประมาณค่าสัมประสิทธิเมตริกซ์ของสมการแบบจำลอง ARX จากสมการ (24)และ(25)

5. คำนวนหาค่า $Y_S(k)$ และ Kalman Filter Markov Parameters $Y_K(k)$ จากระบบสมการ $Y_{SC}(k)$, Kalman Filter Markov Parameters $Y_{KC}(k)$ และ Controller Markov Parameter $Y_D(k)=C_d A_d^{k-1}B_d$ คำนวณจากสมการระบบควบคุม สมการ (22) , (23) และ(24)

6. สร้างเมตริกซ์เสตทสเปซของระบบวงรอบเปิด จาก Markov Parameters ของระบบวงรอบเปิด โดยการใช้วิธีแยกส่วนประกอบ Singular Value จากสมการ

$$A=\sum\nolimits_n^{-1/2}U_n^T H(1)V_n\sum\nolimits_n^{-1/2} \qquad (27)$$

$$B=\sum\nolimits_n^{1/2}V_n^T X_{ni} \qquad (28)$$

$$C=X_{n0}^T U_n\sum\nolimits_n^{1/2} \qquad (29)$$

เมื่อ $\sum_n$ คือ Upper Left Hand nxn Partition ของ $\sum$ ซึ่งมีค่า Singular Value ขนาดใหญ่ที่สุด $,U_{n,}, V_n$ คือเมตริกซ์ที่ถูกสร้างขึ้นจาก จำนวน n Columns ของ Singular Vectors กับ n Singular Value จาก $U_{,}, V$ ตามลำดับ ส่วนค่า $X_{ni}^T=[I_{ni}O_{ni}....O_{ni}]$ และ $X_{no}^T=[I_{no}O_{no}....O_{no}]$ เมื่อ ni คือจำนวนของ อินพุท และ no คือจำนวนของเอาท์พุท

3. การทดลอง

นำโปรแกรมระบบ(CLID)ที่เตรียมไว้มาใช้ทดลองขึ้นมาเป็น 2 โปรแกรม คือโปรแกรมแรก เป็นโปรแกรมที่ใช้ทดลองผลของระบบที่ไม่เสถียร โดยโปรแกรมส่วนที่ทำหน้าที่ในการสร้างสัญญาณอินพุท(r_k) เข้าสู่ระบบ จะเป็นสัญญาณที่ทำให้ระบบทำงานอย่างไม่เสถียร ส่วนอีกโปรแกรมหนึ่งใช้ทดลองผลของระบบที่เสถียร โดยจะมีโปรแกรมที่ทำหน้าที่ในการสร้างสัญญาณอินพุทที่ทำให้ระบบทำงานอย่างเสถียร แล้ว

ทำการทดลองแยกออกเป็นการทดลองกับระบบที่ไม่เสถียร และระบบที่เสถียร

กระบวนการทั้งสองวิธีจะเป็นการนำข้อมูลอินพุท-เอาท์พุท เข้าสู่โปรแกรมของ(CLID) เพื่อคำนวณหา Parameter สำคัญของระบบ ได้แก่ State Space Model A, Ai ค่าที่ได้ออกมาหากเป็นในลักษณะ Non-Minimum Phase เป็นการบ่งชี้ว่าระบบเสถียร จากนั้นจะเรียกค่า eig(A),eig(Ai) ออกมา หากพบว่า $eig(A) = eig(Ai)$ แสดงว่าการเจาะจงระบบถูกต้อง และสรุปว่าการเจาะจงระบบหรือการทำนายเอกลักษณ์ได้ผลสมบูรณ์ และยืนยันได้ว่าค่า Parameter อื่นๆคือ A,B,C คือ State Space Model ของระบบ

3.1 ทำการทดลองกับระบบที่ไม่เสถียร

3.1.1 เข้าสู่โปรแกรมคอมพิวเตอร์ Matlab Version 6.5 ที่ได้สร้างโปรแกรม Closed-Loop Identification(CLID)ไว้แล้ว เรียกโปรแกรมที่ใช้ทดลองกับระบบที่ไม่เสถียร (ชื่อโปรแกรมย่อยว่า SYSDFC_2.M ซึ่งโปรแกรมจะทำหน้าที่สร้างสัญญาณให้เป็นสัญญานของระบบที่ไม่เสถียร และจะถูกควบคุมให้เสถียรด้วยคอนโทรลเลอร์) เพื่อดูการทำงานและดูการแสดงผล

3.1.2 เลือกระบบที่เป็นระบบไม่เสถียร (ชื่อโปรแกรมย่อยว่า SYSDFC_2.M)

3.1.3 ป้อนค่าจำนวนข้อมูล Input ให้กับระบบโดยกำหนดจำนวนข้อมูลเพื่อให้ตรงกับขอบเขตของการทดลอง ซึ่งควรจะกำหนดจำนวนไว้ตั้งแต่ 200 ขึ้นไป ซึ่งก็คือ 200 ข้อมูล และจะแสดงผล Output 200 ข้อมูล

3.1.4 สัญญาณรบกวน(Noise)กำหนดให้เป็น 0

3.1.5 กำหนดช่วงเวลา (TS)

3.1.6 กำหนดช่วงระยะห่างของช่วงเวลา (ScaleT=TS:TS:TS*nd)

3.1.7 กำหนดค่า ARX ซึ่งควรกำหนดตั้งแต่ 3 ขึ้นไป

3.1.8 กำหนดค่า Identify D(1=yes,0=no) ,Number of Markov Parameters for ERA และ กำหนดค่า Number of States of Realized System ตามค่าของซิงกูลาร์ แวลู(Singular Value) ที่ได้จากการแสดงผลจากการคำนวนของระบบ

3.1.9 ให้โปรแกรมทำการแสดงผลของเมตริกซ์ระบบ ได้แก่ A,Ai,B,Bi,C,Ci ผลที่แสดงของค่า A,Ai เป็น Non-Minimum Phase จะเป็นการบ่งชี้ของระบบเมื่อถูกควบคุมด้วย Controller แล้วทำให้เสถียร

3.1.10 ให้โปรแกรมทำการแสดงผลของเมตริกซ์ระบบ ได้แก่ eig(A), eig(Ai)ผลที่แสดงของค่าที่ตรงกันจะเป็นการบ่งชี้ของระบบที่ถูกทำให้เสถียรแล้ว และค่า A,B,C เป็นค่าที่ใช้เจาะจงระบบได้

3.2 ทำการทดลองกับระบบที่ไม่เสถียรโดยกำหนดให้มี noise

ทำการทดลองตามลำดับขั้นเช่นเดียวกับในหัวข้อ 3-1 แต่ป้อนสัญญาณรบกวนเข้าไป โดยจะกำหนดค่าเท่าไรก็ได้ซึ่งเป็นค่าที่น่าจะเกิดขึ้นได้ในความเป็นจริงหรือเป็นค่าที่วัดได้จริงมาก่อน แต่ในที่นี้จะสมมติให้มีค่าเท่ากับ 0.01 เมื่อป้อนค่าต่างๆ แล้วดูการแสดงผล

3.3 ทำการทดลองกับระบบที่เสถียร

ทำการทดลองตามลำดับขั้นเช่นเดียวกับในหัวข้อ 3.1 เลือกระบบที่เป็นระบบที่สร้างสัญญาณที่เสถียร(ชื่อโปรแกรมย่อยว่า SYSDFC_1.M) แต่ป้อนสัญญาณรบกวนเข้าไป โดยจะกำหนดค่าเท่าไรก็ได้ซึ่งเป็นค่าที่น่าจะเกิดขึ้นได้ในความเป็นจริงหรือเป็นค่าที่วัดได้จริงมาก่อน แต่ในที่นี้จะสมมติให้มีค่าเท่ากับ 0.01 เมื่อป้อนค่าต่างๆ แล้วดูการแสดงผล ให้โปรแกรมทำการแสดงผลของเมตริกซ์ระบบ ได้แก่ eig(A), eig(Ai) ผลที่แสดงของค่าที่ตรงกัน จะเป็นการบ่งชี้ของระบบที่ถูกทำให้เสถียรแล้ว และค่า A,B,C เป็นค่าที่ใช้เจาะจงระบบได้

3.4 ทำการทดลองกับระบบที่เสถียรโดยกำหนดให้มี Noise

ทำการทดลองตามลำดับขั้นเช่นเดียวกับในหัวข้อ 3.1 แต่ป้อนสัญญาณรบกวนเข้าไปโดยจะกำหนดค่าเท่าไรก็ได้ซึ่งเป็นค่าที่น่าจะเกิดขึ้นได้ในความเป็นจริงหรือเป็นค่าที่วัดได้จริงมาก่อน แต่ในที่นี้จะสมมติให้มีค่าเท่ากับ 0.01 เมื่อป้อนค่าต่างๆ แล้วดูการแสดงผล

4. สรุปผลและข้อเสนอแนะ

จากการทดลองทั้งสองกรณีพบว่าทั้งกรณีที่ระบบไม่เสถียร แต่มีระบบควบคุมแล้ว และระบบที่เสถียร เมื่อนำมาทำการทดลองแล้วค่าไอเก็นแวลู (Eigen Value) ทุกกรณีจะเท่ากัน และแม้ว่าจะเปลี่ยนแปลงค่าอื่นๆที่ป้อนเข้าไปไม่ว่าจะเป็นจำนวนข้อมูล อัตราสุ่มช่วงเวลา Number of Markov Parameters for ERA , Number of States of Realized System ก็จะให้ผลอย่างเดียวกัน การเปลี่ยนแปลงจำนวนข้อมูลและค่าต่างๆเข้าสู่ระบบ ซึ่งก็จะให้ผลเช่นเดียวกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ ใช้ได้ผลในการเจาะจงระบบตามแบบวิธีการจำลองระบบควบคุมแบบวงรอบปิด เพื่อให้แสดงผลออกมาเป็นแบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล ค่าเสตทเสปซของระบบสามารถใช้เป็นค่าเจาะจงของระบบได้อย่างถูกต้อง

เอกสารอ้างอิง

[1] Juang,.J.-N. **Applied System identification**.New Jersey.NASA Langley Research Center.PTR Prentice Hall Englewood Cliffs,1994

[2] J.-K.Huang,H.CLee,M.P.Schoen,and M.-H.Hsiao. **State-Space system identification from closed-loop frequency response data**.Journal of Guidance,control and dynamic, Vol.19,No.6Nov-dec 1996,.pp 1378-1380

[3] สินชัย ชินวรรัตน์. “การปรับปรุงกระบวนการหาเอกลักษณ์ของระบบโดยวิธีไวท์ค่าเรสิดุล.”การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 15,หน้า 86-90. 28-30 พ.ย 2544

[4] มานะ วิเชียรพงษ์ “การทำนายเอกลักษณ์ของระบบรองรับในรถยนต์โดยเทคนิค OKID “วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาเครื่องกล สาขาวิศวกรรมศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัยสถาบันเทคโนโลยี่พระจอมเกล้าพระนครเหนือ กรุเทพมหานคร.2545