

## การหาสมการความเฉื่อยปรากฏของหุ่นยนต์ Pantograph Cobot Equation of Appearance Inertia of Pantograph Cobot

ภาวิต สุวจิตตานนท์ วิทยา วัฒนสุโกประสิทธิ์\*  
ห้องปฏิบัติการ สหวิทยาการมนุษย์และหุ่นยนต์  
ภาควิชาเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330  
โทร 0-2218-6610-1 โทรสาร 0-2252-8889 E-mail: witaya.w@chula.ac.th  
\*Corresponding Author

Parvit Suvachittanont, Witaya Wannasuphprasit  
Human Robotics Laboratory  
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University  
Payathai Rd. Patumwan Bangkok Thailand 10330  
Tel (66)2 218-6610-1, Fax (66)2 252-8889 E-mail: witaya.w@chula.ac.th

### บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการพัฒนาหุ่นยนต์โคบอตต้นแบบสองมิติและวิธีการหาสมการของความเฉื่อยปรากฏของหุ่นยนต์โคบอตต้นแบบสองมิติ หุ่นยนต์นี้ประกอบด้วยสองส่วนหลักคือส่วนแรกเรียกว่า Double CVT สร้างจากข้อต่อแบบ Spherical CVT จำนวนสองชุดที่ต่อกันแบบขนาน ส่วนที่สองเป็นแขนกล pantograph เมื่อติดตั้งบน Double CVT ปลายแขนจะเคลื่อนที่ได้สองมิติในระนาบ หุ่นยนต์โคบอตทำงานร่วมกับมนุษย์ดังนั้นมนุษย์จะรับรู้ถึงความเฉื่อยที่ปลายแขนหุ่นยนต์เพื่อศึกษาและควบคุมความเฉื่อยปรากฏจึงจำเป็นต้องหาสมการพลศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์ แต่เนื่องจากเป็นแขนกลแบบขนานดังนั้นในการหาสมการความเฉื่อยปรากฏนั้นจะใช้วิธีการลากรางจ์ (Lagrangian Formulation)

### Abstract

This paper presents the development of a 2-DOF Cobot and also describes equations of appearance inertia of a 2-DOF Cobot. The cobot's mechanism consists of two parts. The first part is called Double CVT which made from two Spherical CVTs connected in parallel. The second part is a pantograph manipulator. When installing the pantograph manipulator on Double CVT, the end effectors can move in x-y horizontal plane. Since the Cobot works directly with human operator, he/she will sense different inertia in different configurations. In order to

control the apparent inertia, we derive dynamics equation of the pantograph using Lagrangian Formulation.

### 1. บทนำ

งานวิจัยชิ้นนี้ได้นำ Spherical CVT[1] มาใช้ในงานทางด้านหุ่นยนต์โคบอต (Cobot: Collaborative Robot) ซึ่งเป็นหุ่นยนต์ที่ถูกออกแบบมาเพื่อที่ทำงานร่วมกับมนุษย์ได้โดยตรงบนพื้นที่การทำงานเดียวกันอย่างปลอดภัย หุ่นยนต์โคบอตเป็นอุปกรณ์ทางด้านหุ่นยนต์ที่มีพฤติกรรมเป็นพาสซีฟ (Passive) ไม่มีต้นกำเนิดส่งกำลังสู่ระบบอาศัยกำลังจากมนุษย์ในการเคลื่อนที่ โคบอตเพียงทำหน้าที่กำหนดทิศทางเคลื่อนที่ไปพร้อมกันในพื้นที่การทำงานเดียวกัน หุ่นยนต์โคบอตที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นหุ่นยนต์โคบอตชนิดขนานเคลื่อนที่ในสองมิติ ในรูปแบบของแขนกล pantograph ซึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ สองมิติ ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้วิธีการของแขนกลแบบอนุกรมทั่วไปในการหาสมการพลศาสตร์ ในงานวิจัยนี้ใช้วิธีการของลากรางจ์ (Lagrangian Formulation) ที่จัดรูปแบบให้ตัวคูณลากรางจ์

### 2. แนวคิดและหลักการเบื้องต้นของหุ่นยนต์โคบอต

หุ่นยนต์โคบอตถูกออกแบบมาให้สามารถทำงานร่วมกับมนุษย์ในพื้นที่ทำงาน(workspace)เดียวกัน หุ่นยนต์โคบอตแตกต่างกับหุ่นยนต์หรืออุปกรณ์แฮปติกอินเทอร์เฟซ (Haptic Interface) ทั่วไปตรงที่หุ่นยนต์โคบอตจะไม่สร้างแรงปฏิกิริยาตรงมาบังคับการเคลื่อนที่ของผู้ใช้งานแต่จะทำการเพียงเปลี่ยนทิศทางแรงของผู้ใช้งานเป็นหลักเท่านั้น ผู้ใช้งานจะเป็นผู้กำหนดการเคลื่อนที่เอง การทำงานของหุ่นยนต์โค

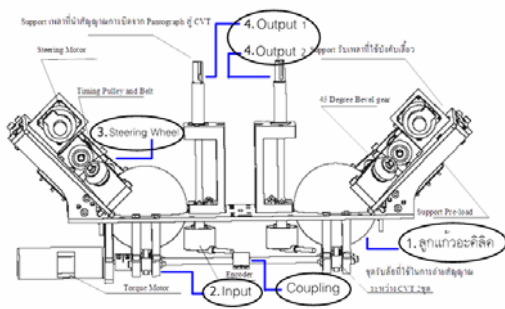
บอทจึงเป็นการทำงานในระบบแพสซีฟ (Passive) ซึ่งปลอดภัยต่อผู้ใช้ในการทำงาน

หุ่นยนต์โคบอทไม่ใช้มอเตอร์หรืออุปกรณ์ต้นกำลัง (actuators) เพื่อส่งกำลังให้กับข้อต่อ (joints) แต่หุ่นยนต์โคบอทจะใช้ซีวีที (CVTs : Continuous Variable Transmission) ในการควบคุมความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วของแต่ละข้อต่อ ทำให้สามารถควบคุมทิศทาง การเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทได้ อุปกรณ์ซีวีทีนี้จะสร้างสร้างข้อบังคับแบบนอนโฮโลโนมิก (nonholonomic constraints) ให้กับหุ่นยนต์โคบอทโดยที่ไม่ว่าหุ่นยนต์โคบอทจะมีจำนวนมิติการทำงาน (task space) เท่าไรก็ตาม การเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทจะมีเพียง 1 องศาอิสระ (Degree of Freedom) เท่านั้น การทำงานของ หุ่นยนต์โคบอท จะมีการทำงาน 2 ลักษณะคือ 1) การทำงานแบบอิสระ ( Virtual Caster ) การทำงานในลักษณะนี้ ผู้ใช้จะรู้สึกเหมือนกับสามารถเคลื่อนที่ได้ ง่ายอย่างอิสระ หุ่นยนต์โคบอทจะเปลี่ยนทิศทางเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทให้เป็นไปตามการเคลื่อนที่ของผู้ใช้ และ 2) การทำงานแบบบังคับ ( Virtual Wall ) ซึ่งจะบังคับทิศทางเคลื่อนที่ของมนุษย์ พิจารณา ตัวอย่างในการสร้างกำแพงเสมือน เมื่อผู้ใช้เคลื่อนที่เข้าหากำแพงเสมือน ผู้ใช้จะไม่สามารถเคลื่อนหุ่นยนต์โคบอทให้ทะลุกำแพงได้ แต่จะไถลไปตามกำแพง และถ้าเคลื่อนออกจากกำแพงหุ่นยนต์โคบอทจะกลับไปทำงานในแบบอิสระ ดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้ในบทความ [4]

### 3. แนวคิดในการออกแบบของ Pantograph Cobot

Cheepsumol และคณะ [4] ได้พัฒนาและออกแบบหุ่นยนต์โคบอทสองมิติโดยใช้ Spherical CVT จำนวนสองชุดต่อแบบขนานกัน ในงานวิจัยนี้ได้ทำการคำนวณ ออกแบบ และสร้างชุด อุปกรณ์ CVT ที่ได้ใช้หลักการเดียวกันกับ Tetrahedral CVT ขึ้นมา 2 ชุด ในแต่ละชุดของ CVT จะมีเฟลาอินพุตและเฟลาเอาท์พุต อัตราทดของเฟลาทั้งสองปรับได้ด้วย steering wheel.

ในการออกแบบนี้เชื่อมเฟลากลางเอาท์พุตของ CVT ชุดที่หนึ่งเข้ากับเฟลาอินพุตของ CVT ชุดที่สอง เพื่อการส่งถ่ายกำลังเข้าด้วยกันเราเรียกว่า Double CVT



รูปที่ 1 รายละเอียดต่างๆของอุปกรณ์ Double CVT

ชุดอุปกรณ์หลักๆของ Double CVT คือ

1. ทรงกลมขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 4 นิ้วจำนวนสองลูกที่มีความกลมเที่ยงตรงสูง

2. ชุด Input ที่ประกอบด้วย Torque motor ขั้วที่เพลากลาง ใช้สำหรับส่งกำลังให้กับ Double CVT และล้อยูลิเทนสำหรับใช้หมุนลูกแก้วอะคิลิค
3. ชุดปรับเปลี่ยนอัตราทด ( Steering Wheel ) ที่ประกอบด้วย Steering motor ที่ใช้สำหรับปรับมุมของล้อปรับอัตราทด และล้อยูลิเทนสำหรับปรับแกนหมุนของลูกแก้วอะคิลิค
4. ชุด Output ซึ่งมีอยู่ทั้งหมด 2 ชุด ประกอบด้วยล้อยูลิเทนสำหรับรับถ่ายกำลังจากลูกแก้วอะคิลิค และเพลลา Output สำหรับ ต่ออุปกรณ์นำอัตราทดที่ส่งออกจาก Double CVT ไปใช้งาน

แต่ละข้างของ Double CVT สามารถทำงานร่วมกันหรือแยกกัน อย่างอิสระได้โดยปลดตัว Coupling ที่ต่ออยู่ที่ชุด Input ดังที่แสดงอยู่ในรูปที่ 3 ส่วนชุด Steering Wheel นั้นทั้งสองข้างใช้ motor ควบคุมอิสระต่อกัน เพียงสั่งการให้ motor หมุนไปเป็นมุมที่เท่ากันหรือต่างกัน ก็จะสามารถกำหนดให้ Output ทั้งสองข้างของ CVT มีอัตราทดที่เท่ากันหรือต่างกันตามต้องการ ส่วนประกอบต่างๆของอุปกรณ์ Double CVT นี้ขึ้นรูปด้วยเครื่อง CNC เนื่องจากต้องการความเที่ยงตรงสูง โดยแผ่นฐาน (Base) นั้นทำมาจาก Stainless Steel เพื่อความแข็งแรง เฟลาต่างๆที่ใช้ ทำมาจาก เหล็กกล้า ส่วนประกอบชิ้นรูปอื่นๆใช้ อลูมิเนียม เป็นวัสดุหลัก ลูกแก้วที่ใช้ทำมาจากอะคิลิคขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 4 นิ้ว และลูกล้อใช้ยูลิเทนความแข็ง CHA90 หล่อลงบนแกนล้อที่ทำจากเหล็ก ต้นแบบของ Double CVT แสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 รูปต้นแบบจริงของอุปกรณ์ส่งถ่ายความเร็วแบบปรับอัตราทดได้ ต่อเนื่อง Double CVT

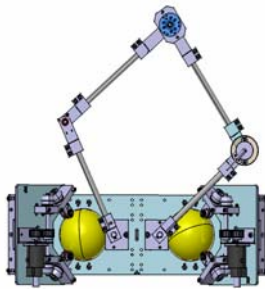
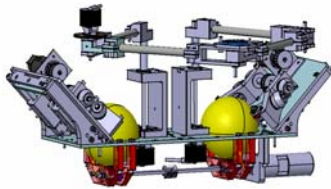
หลักการการทำงานอันหนึ่งของ Double CVT คือการให้ Input จาก Torque motor ไปที่เพลากลาง เพื่อส่งกำลังให้ลูกทรงกลมอะคิลิคทั้งสองลูกในเวลาเดียวกัน แล้วกำหนดอัตราทดของแต่ละ CVT ละโดยปรับมุมของชุดบังคับเลี้ยว (Steering wheel) ไปเป็นมุม ( $\alpha$ ) ต่างๆ เพื่อควบคุมความเร็วที่ออกทาง Output1 และ Output2 ดังนั้นจึงสามารถกำหนดอัตราส่วนการตรอบระหว่าง Input กับ Output1 และกับ Output2 ในกรณีนี้อุปกรณ์นี้ทำหน้าที่เสมือนกับอุปกรณ์ส่งกำลังแบบปรับความเร็วสองแกน (Output สองแกน) ที่ปรับได้อย่างต่อเนื่องและอิสระโดยมีแกน Input ร่วมกันอันเดียว

### 4. Pantograph Cobot

รูปแบบทำงานที่สำคัญอีกลักษณะหนึ่งซึ่งนำมาใช้กับหลักการของหุ่นยนต์โคบอท โดยเพลากลางมิได้ทำหน้าที่รับ Input แต่จะทำหน้าที่แค่เชื่อมต่อ CVT ทั้งสองชุด ในกรณีนี้จะต่อกลไกแขนกลเข้ากับ

แกนเพลลา Output1 และ Output2 ของ Double CVT ทิศทางของแขนกลจะถูกควบคุมด้วยอัตราส่วนความเร็วของ Output1 และกับ Output2 ซึ่งเกิดจากการการควบคุมอัตราทดของ CVT ทั้งสอง เมื่อเรานำเอา Five bar linkage มาต่อกับทางด้าน output ของชุด CVT ทั้งสองก็จะได้เป็น หุ่นยนต์โคบอทในรูปแบบ Pantograph Cobot ดังในรูปที่ 3

ปลายแขนของหุ่นยนต์จะเคลื่อนที่ได้ในระนาบ X-Y โดยเราจะควบคุมทิศทางการเคลื่อนที่ของปลายแขนจากการปรับมุมอัตราทดของ CVT ในขณะที่ทำงานร่วมกับมนุษย์ ผู้ใช้จะออกแรงขับเคลื่อนที่ปลายแขนแต่ทิศทางการเคลื่อนที่จะเป็นตามอัตราส่วนความสัมพันธ์ของ Output1 กับ Output2 ซึ่งระบบเป็นผู้ควบคุม ในขณะที่เคลื่อนที่ระบบควบคุมปรับมุมอัตราทดเป็นค่าต่างๆ เพื่อบังคับทิศทางให้แขนกลตามเส้นทางที่โปรแกรมไว้ รูปที่ 3 ได้แสดงหุ่นยนต์แขนกล Pantograph Cobot



รูปที่ 3 Pantograph Cobot

### 5. Lagrangian Dynamic of the Pantograph

เนื่องจากหุ่นยนต์โคบอทแบบ Pantograph เป็นกลไกแบบขนาน ดังนั้นจึงใช้ทฤษฎีและหลักการการวิเคราะห์ของแขนกลแบบอนุกรมโดยตรงไม่ได้ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ใช้หลักการของ Lagrangian Formulation[2]

Lagrangian เป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์ประเภทหนึ่ง ซึ่งอาศัยหลักการคิดของผลต่างระหว่างพลังงานเทียบกับ ตัวแปรของระบบและเวลา มาใช้ในการคำนวณ ซึ่งเราจะนิยาม ลากราน (L) ดังนี้

$$L = K - P$$

โดยที่  $L$  คือ ตัวลากราน  $K$  คือ พลังงานจลน์  $P$  คือ พลังงานศักย์

โดยที่สมการ ลากราน ที่เลือกมาใช้เป็นชนิด ที่ 1 (Lagrangian equation of the first type)[2] ซึ่งรูปแบบของสมการมีดังนี้

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} \quad (1)$$

สำหรับ  $j = 1$  ถึง  $n$

เมื่อ  $\Gamma_i$  คือ ฟังก์ชันเงื่อนไข สมการที่  $i$

$k$  คือ จำนวนของฟังก์ชันเงื่อนไข

$\lambda_i$  คือ ตัวคูณลากราน

$n$  คือ จำนวนของพิกัดฉาก (Coordinate)

วิธีในการแก้สมการคือ การจัดสมการลากรานให้อยู่ใน 2 รูปแบบ รูปแบบแรกคือการจัดรูปแบบให้ตัวคูณลากราน เป็นตัวแปรที่ต้องการหาค่า ส่วนอีกรูปแบบหนึ่งคือการจัดรูปให้แรงที่มอเตอร์กระทำเป็นตัวแปรที่ต้องการหาค่า โดยที่ จำนวน  $k$  สมการแรก เป็นสมการที่เกี่ยวข้องกับพิกัดอิสระที่เหลือจากการควบคุม (Redundant Coordinate) และจำนวน  $n - k$  สมการที่เหลือเป็นสมการที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรของแรงที่ข้อต่อของหุ่นยนต์ ซึ่งรูปแบบแรกของสมการมีดังนี้

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j \quad (2)$$

โดยที่  $Q_j$  คือแรงทั่วไป ที่เป็นแรงภายนอก

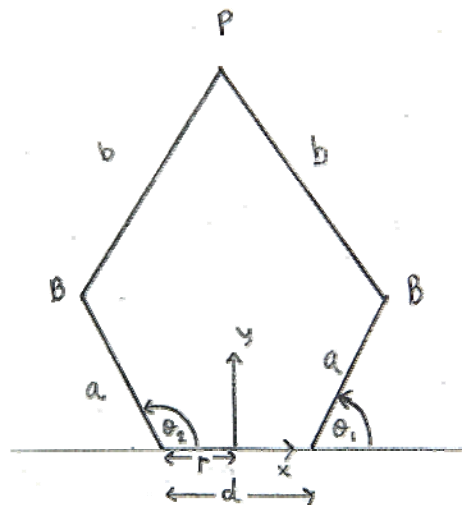
รูปแบบที่สองของสมการคือ

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} \quad (3)$$

เมื่อ  $Q_j$  คือ แรงที่ขับโดยมอเตอร์ (Actuator Force or Torque)

### 6. สมการความเฉื่อยปรากฏของหุ่นยนต์โคบอท

Pantograph Cobot เป็นหุ่นยนต์แบบขนาน ซึ่งมีโครงสร้างของแขนของหุ่นยนต์ดังในรูปที่ 4



รูปที่ 4 โครงสร้างของแขนหุ่นยนต์โคบอทสองมิติ

โดยที่ input ของระบบจะเคลื่อนที่เป็นมุม  $\theta_1$  และ  $\theta_2$  จากซ้ายไปขวาตามลำดับ โดยที่จุดบนสุดเป็นจุด  $P$  ซึ่งเป็นจุดปลายแขนของหุ่นยนต์โคบอท โดยที่ระยะระหว่าง input ทั้งสองคือ  $d$  และ กำหนดจุด Origin X-Y เอาไว้ที่ตรงกลางระหว่าง input ทั้งสอง เป็นระยะทาง  $r_1$   $r_2$  ตามลำดับ

วิธีการหาสมการจลนศาสตร์ จึงมีความซับซ้อนมากกว่าหุ่นยนต์แบบอนุกรม ดังนั้นจึงต้องอาศัยวิธีการหาสมการจลนศาสตร์ ด้วยวิธีทาง ลากราน ชนิดที่ 1[2]

อันดับแรก ทำการกำหนด Redundant Coordinate คือจุดปลายของโคบอท  $p_x$  และ  $p_y$  ดังนั้น จะได้  $p_x$   $p_y$   $\theta_1$   $\theta_2$  เป็น generalized coordinate

จากสมการที่ 1 แสดงให้เห็นว่ามีระบบสมการทั้งหมด 4 สมการใน 4 ตัวแปร ตัวแปรทั้ง 4 ได้แก่  $\lambda_1$   $\lambda_2$  และ actuator torques  $Q_3$   $Q_4$  โดยที่มี generalized forces  $Q_1$   $Q_2$  เป็นแรงภายนอกออกแรงในแนวแกน x y ของจุด P ของโคบอท

การหาจลนศาสตร์ของหุ่นยนต์วิธีนี้ต้องการสมการควบคุม (Constraint Equations)  $\Gamma_1$   $\Gamma_2$  โดยที่สมการควบคุมนี้หามาได้จากระยะทางระหว่าง ข้อต่อ B และ P จะมีความยาวเท่ากับความยาวของ link 2 นั่นก็คือ

$$\Gamma_i = \overline{B_i P_i^2} - b^2 = 0 \quad (4)$$

$$\Gamma_i = (P_x + r_i - ac\theta_i)^2 + (P_y - as\theta_i)^2 - b^2 = 0 \quad (5)$$

โดยที่  $i = 1$  ถึง  $2$

เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ กำหนดให้มวลของแขนโคบอท อยู่ที่จุดหมุนของแขนทั้งหมด ดังนั้น ทำการหาสมการ ลากราน (L) ได้ดังนี้

หา Total Kinetic Energy ของโคบอท จากสมการ

$$K = K_p + \sum_{i=1}^2 (K_{ai} + K_{bi}) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{2} m_p (\dot{P}_x^2 - \dot{P}_y^2) \\ K_{ai} &= \frac{1}{2} (I_m + \frac{1}{3} m_a a^2) \dot{\theta}_i^2 \\ K_{bi} &= \frac{1}{2} m_b (P_x^2 - P_y^2) + \frac{1}{2} m_b a^2 \dot{\theta}_i^2 \end{aligned} \quad (7)$$

$K_p$  คือ Kinetic Energy ที่จุด P

$K_{ai}$  คือ Kinetic Energy ของ link 1

$K_{bi}$  คือ Kinetic Energy ของ link 2

$m_p$  คือ มวลของจุด P

$m_a$  คือ มวลของ link 1

$m_b$  คือ มวลของ link 2

$I_m$  คือ Inertia ของ โคบอท

เนื่องจาก หุ่นยนต์โคบอทเคลื่อนที่ในระนาบ 2 มิติ X-Y ที่ตั้งจากกับแรงดึงดูดของโลก ดังนั้น Potential Energy ของระบบ จึงมีค่าเป็น 0 ดังนั้น สมการลากราน  $L = K - P$  คือ

$$L = \frac{1}{2} (m_p + 2m_b) (\dot{P}_x^2 - \dot{P}_y^2) + \frac{1}{2} (I_m + \frac{1}{3} m_a a^2 + m_b a^2) (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (8)$$

ทำการ derivatives สมการลากราน ด้วย 4 generalized coordinates ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{P}_x} \right) &= (m_p + 2m_b) \ddot{P}_x \\ \frac{\partial L}{\partial P_x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{P}_y} \right) &= (m_p + 2m_b) \ddot{P}_y \\ \frac{\partial L}{\partial P_y} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (I_m + \frac{1}{3} m_a a^2 + m_b a^2) \ddot{\theta}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= (I_m + \frac{1}{3} m_a a^2 + m_b a^2) \ddot{\theta}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ทำการ partial derivatives สมการควบคุม ด้วย 4 generalized coordinates ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_i}{\partial P_x} &= 2(P_x - r - ac\theta_i) \\ \frac{\partial \Gamma_i}{\partial P_y} &= 2(P_y - r - as\theta_i) \\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_1} &= 2a [(P_x - r) s\theta_1 - P_y c\theta_1] \\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_2} &= 0 \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_2} &= 2a [(P_x - r) s\theta_2 - P_y c\theta_2] \end{aligned} \quad (10)$$

เมื่อ  $i = 1$  ถึง  $2$

ทำการแทนค่า derivatives ที่หามาลงในสมการ (2) เมื่อ  $i = 1$  ถึง  $2$  จะได้

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^2 \lambda_i (P_x - r - ac\theta_i) &= (m_p + 2m_b) \ddot{P}_x - f_{P_x} \\ 2 \sum_{i=1}^2 \lambda_i (P_y - r - as\theta_i) &= (m_p + 2m_b) \ddot{P}_y - f_{P_y} \end{aligned} \quad (11)$$

เมื่อ  $f_{P_x} f_{P_y}$  คือแรงภายนอกที่กระทำต่อจุด P ในแนวแกน X Y ตามลำดับ

จากชุดสมการที่ 11 จะสามารถหา ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าได้คือ ตัวคูณลากราง (  $\lambda_1 \lambda_2$  ) ได้

ต่อมาทำการแทนค่า derivatives ที่หามาได้ในสมการ (3) เมื่อ  $i = 3$  ถึง 4 จะได้

$$\tau_1 = (I_m + \frac{1}{3}m_a a^2 + m_b a^2)\ddot{\theta}_1 - 2a\lambda_1 [(P_x - r)s\theta_1 - P_y c\theta_1] \quad (12)$$

$$\tau_2 = (I_m + \frac{1}{3}m_a a^2 + m_b a^2)\ddot{\theta}_2 - 2a\lambda_2 [(P_x - r)s\theta_2 - P_y c\theta_2] \quad (13)$$

หลังจากที่ได้ทำการหาจลนศาสตร์ การเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์โคบอทแบบสองมิติออกมาแล้ว ก็จะได้สมการการเคลื่อนที่อย่างง่ายอยู่ในรูปแบบของ สมการเมตริกซ์ สองมิติ[3] ดังนี้

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{ii} & D_{ij} \\ D_{ji} & D_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_i \\ \ddot{\theta}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{iii} & D_{ijj} \\ D_{jji} & D_{jjj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i^2 \\ \dot{\theta}_j^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

โดยที่ พจน์  $D_{ii}$  คือพจน์ของ ความเฉื่อยปรากฏของหุ่นยนต์ ที่ข้อต่อ  $i$  ดังนั้น ความเร่งที่ข้อต่อ  $i$  เนื่องจากแรงมอเตอร์ที่ข้อต่อ  $i$  คือ  $D_{ii}\ddot{\theta}_i$  ส่วนพจน์  $D_{ij}$  คือ Coupling Inertia ระหว่างข้อต่อ  $i$  กับข้อต่อ  $j$  ดังนั้นความเร่งที่ข้อต่อ  $i$  หรือ  $j$  เนื่องจากแรงมอเตอร์ที่ข้อต่อ  $j$  หรือ  $i$  ตามลำดับคือ  $D_{ij}\ddot{\theta}_i$  และ  $D_{ji}\ddot{\theta}_j$  ตามลำดับ ส่วน  $D_{ijj}\dot{\theta}_j^2$  คือแรงเข้าสู่ศูนย์กลาง ที่กระทำที่ข้อต่อ  $i$  เนื่องจากความเร็วที่ข้อต่อ  $j$

## 7.สรุป และ งานวิจัยในอนาคต

บทความนี้นำเสนอ การออกแบบและพัฒนาหุ่นยนต์ Pantograph Cobot หลักการในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ และการควบคุม และได้แสดงถึงวิธีและขั้นตอนการหาสมการความเฉื่อยของหุ่นยนต์โคบอทแบบสองมิติด้วยวิธีการของลากรางพอมูเลชั่นที่จัดรูปแบบให้ตัวคูณลากราง โดยสามารถหาและนำเสนอสมการพลศาสตร์ของแขนกลโคบอทแบบขนาน

ปัจจุบันงานวิจัยกำลังศึกษาใช้ความเฉื่อยปรากฏในการควบคุมหุ่นยนต์โคบอทสองมิติ ซึ่งจะทำการหาสมการของความเฉื่อย กับค่าตัวแปรต่างๆ ตามฟังก์ชัน ที่ได้ทำการคิดขึ้น ซึ่งเมื่อทำการหาสมการได้แล้ว หลังจากนั้นก็จะทำการสร้างระบบควบคุมหุ่นยนต์โคบอทของจริงแล้วก็จะทำการทดลองเพื่อตรวจสอบความถูกต้องต่อไป

## เอกสารอ้างอิง

[1] Moore, C., "Continuously Variable Transmission for Serial Link Cobot Architectures", Master's thesis, Department of

Mechanical Engineering, Northwestern University, March 1997

[2] Lung-Wen Tsai, "Robot Analysis The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators" ,A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, INC.

[3] Saeed B. Niku , "Introduction to Robotics Analysis, Systems, Applications" ,Prentice Hall Upper Saddle River , NJ 07458

[4] Wannasuphprasit, W. and Cheepsumol, T. 2004. Parallel CVT mechanisms, Proceedings of the 2004 JSAE Annual Congress. JSAE Annual Congress Proceedings No. 64-04, Pacific Convention Plaza, Yokohama, Japan, 18-21 May 2004, code 20045459.