การทำนายการแข็งตัวของน้ำแข็งในสองมิติโดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องแบบกริดคงตัว

Prediction of 2-D Ice Solidification Using Fixed-Grid Finite Difference Method

จิตติน แตงเที่ยง
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปทุมวัน กรุงเทพ ฯ 10330
โทร 0-2218-6590 โทรสาร 0-2252-2889 อีเมล์ fmectt@eng.chula.ac.th

Chittin Tangthieng
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University Bangkok 10330
Tel 0-2218-6590, Fax 0-2252-2889, Email fmectt@eng.chula.ac.th

บทคัดย่อ

ในปัจจุบันมีการผลิตน้ำแข็งในประเทศส่วนมากจะเป็นการผลิตน้ำแข็งในรูปของน้ำแข็งซอง ซึ่งจะนำมาใช้ในการถนอมอาหารหรือใช้สำหรับการบริโภค งานวิจัยชิ้นนี้เป็นการนำเอาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการแข็งตัวของน้ำแข็งซองเพื่อทำนายอัตราการผลิตของน้ำแข็งและสามารถนำไปปรับปรุงกระบวนการผลิตเพื่อให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น โดยในเบื้องต้นปัญหาการแข็งตัวจะสมมติให้เป็นแบบสองมิติและมีสภาวะไม่คงตัว เงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบการพาความร้อนซึ่งมาจากน้ำเกลือที่มีอุณหภูมิต่ำกว่าจุดเยือกแข็งของน้ำ สมการกำกับจะมีเพียงสมการเดียวซึ่งสามารถใช้ได้กับบริเวณที่เป็นของแข็งและของเหลวโดยมีสมการเสริมซึ่งเขียนอยู่ในรูปอัตราส่วนของเหลว เนื่องจากกริดที่กำหนดมีขนาดคงที่ดังนั้นบริเวณรอยต่อจึงต้องสมมติให้อัตราส่วนของเหลวมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นกับอุณหภูมิที่บริเวณรอยต่อระหว่างเฟสของแข็งและของเหลวเพื่อให้เกิดเสถียรภาพของอัลกอริทึม การแก้สมการจะใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องร่วมกับวิธีการคำนวณซ้ำเพื่อให้คำตอบลู่เข้า ผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงพบว่ามีค่าที่ใกล้เคียงกัน โดยที่ความคลาดเคลื่อนของค่าความหนาของน้ำแข็งมีค่าเฉลี่ยอยู่ที่ประมาณร้อยละ 7 และค่าความคลาดเคลื่อนของการคำนวณการกระจายของอุณหภูมิอยู่ที่ประมาณร้อยละ 2

Abstract

Most of the ice products in Thailand are in a form of block ice, which can be used for preserving food or for consuming. This research mainly focuses on applying a numerical method to solidification of block ice in order to predict the ice production rate, resulting the higher efficiency of the ice production. The problem is assumed unsteady and two dimensional subjected to the convective boundary condition of brine at lower temperature than the freezing point of water. The governing equation can be written into a single equation for both solid and liquid regions, together with the supplementary equation written in terms of the liquid fraction. Once the solidification process takes place, the computational domain will be divided into two parts: the solid and liquid regions. Since the computational domain is discretized into fixed grids, the liquid fraction is assumed to be a linear function with temperature at the interface between solid and liquid phases in order to create stability of the algorithm. The numerical solutions are obtained by employing the finite difference equation together with the iterative procedure to generate the converging solutions. It is found that the agreement between the numerical results and the exact solution are fairly good. The relative error of the numerical prediction of the ice thickness is approximately 7 percent. In addition, the relative error of the predicted temperature profile is approximately 2 percent

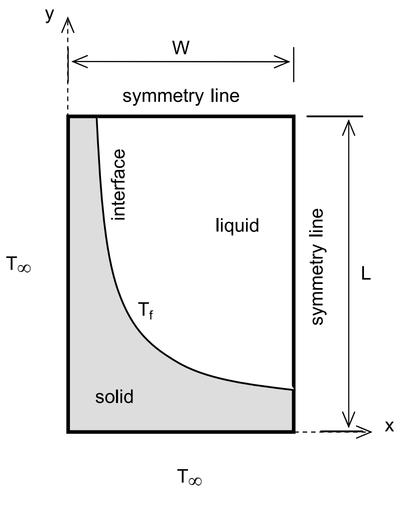
1. บทนำ

การแข็งตัวของสสารเป็นปรากฏการณ์หนึ่งที่เห็นอยู่ทั่วไป โดยเฉพาะอย่างยิ่งการแข็งตัวของน้ำซึ่งสามารถพบเห็นได้ในธรรมชาติและในอุตสาหกรรม การผลิตน้ำแข็งโดยมากจะผลิตอยู่ในรูปของน้ำแข็งซองซึ่งสามารถนำมาบริโภคและใช้ในการถนอมอาหาร ซึ่งปัจจุบันได้มีการประยุกต์นำเอาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาเพื่อทำนายปรากฏการณ์แข็งตัวของสสาร ในทางกายภาพนั้นปัญหาการแข็งตัวจะมีลักษณะเด่นคือขอบเขตของปัญหามีการเคลื่อนที่เกิดขึ้น (moving boundary problem) [1] ซึ่งจะส่งผลให้สมการกำกับที่ได้มีลักษณะที่เป็นแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) ลักษณะของการเคลื่อนที่ของขอบเขต

ดังกล่าวสร้างความยุ่งยากแก่ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่จะนำมาประยุกต์ใช้ จากการสำรวจพบว่าระเบียบวิธีเชิงเลขที่นำมาประยุกต์ใช้ในปัญหาการแข็งตัวนั้นสามารถแบ่งได้เป็น 3 แบบคือแบบแรกใช้การแปลงทางคณิตศาสตร์เพื่อให้โดเมนสำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขมีขนาดคงที่ แบบที่สองคือทำการติดตาม (track) ขอบเขตที่เคลื่อนที่โดยการเปลี่ยนขนาดของกริด [2] จะพบว่าวิธีทั้งสองจะให้คำตอบที่แม่นยำสำหรับปัญหาในหนึ่งมิติ แต่การคำนวณจะมีความซับซ้อนมากสำหรับปัญหาที่มีมากกว่าหนึ่งมิติ ส่วนแบบสุดท้ายคือการใช้กริดที่คงที่ (fixed grid) [3] ซึ่งจะไม่เปลี่ยนไปตามขอบเขตที่เคลื่อนที่ ซึ่งวิธีดังกล่าวจะเป็นที่นิยมในปัจจุบันเนื่องจากมีความยืดหยุ่นสูง และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีมากกว่าหนึ่งมิติได้ ปัญหาของการแข็งตัวพร้อมกับการละลาย รวมไปถึงการแข็งตัวของโลหะผสมหรือสารละลายที่มีจุดเดือดไม่คงที่ ดังนั้นในงานวิจัยชิ้นนี้จึงเป็นการนำเอาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบใช้กริดคงตัวเพื่อนำมาทำนายปัญหาการแข็งตัวของสสาร โดยในที่นี้จะเน้นไปที่สารบริสุทธิ์ ในการคำนวณจะนำเอาความสัมพันธ์โดยประมาณระหว่างอุณหภูมิและอัตราส่วนของเหลวมาประยุกต์ใช้เพื่อจะส่งผลให้ให้คำตอบเชิงตัวเลขที่คำนวณได้ลู่เข้า ซึ่งขั้นตอนดังกล่าวจะกล่าวถึงในรายละเอียดในส่วนถัดไป

2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และสมการกำกับ

สำหรับปัญหาที่จะนำมาพิจารณาในงานวิจัยชิ้นนี้นั้นจะเป็นปัญหาการแข็งตัวในสองมิติในระบบพิกัดฉากและอยู่ในสภาวะไม่คงตัว ระบบมีขนาดกว้าง W และยาว L ตามลำดับ โดยที่ด้านซ้ายและด้านล่างของระบบจะมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ T_∞ ในขณะที่อีกด้านบนและด้านขวาของระบบจะไม่มีความร้อนส่งผ่านเนื่องจากความสมมาตรของระบบ การแข็งตัวจะเกิดขึ้นที่อุณหภูมิคงที่ซึ่งมีค่าเท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง (T_f) เนื่องจาก $T_\infty < T_f$ ดังนั้นบริเวณของน้ำแข็งจะก่อตัวขึ้นที่บริเวณผนังด้านซ้ายและด้านล่าง ในขณะเดียวกันอุณหภูมิตั้งต้นระบบก่อนเริ่มการแข็งตัวคือ T_i ซึ่งมีค่าสูงกว่า T_f แผนภาพของระบบที่กำลังพิจารณาจะแสดงอยู่ในรูปที่ 1



รูปที่ 1 แผนภาพของระบบที่พิจารณา

จากข้อสมมุติฐานดังกล่าว แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ครอบคลุมทั้งบริเวณของแข็งและของเหลว รวมไปถึงเงื่อนไขตั้งต้นและเงื่อนไขขอบเขตจะสามารถเขียนได้ดังนี้ [4]

$$C_{vol}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_{vol}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{vol}\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \delta H\frac{\partial g_l}{\partial t} \quad (1)$$

$$t = 0\,; \qquad T = T_i \quad (2a)$$

$$x = 0\,; \qquad T = T_\infty \quad (2b)$$

$$x = W\,; \qquad k_{vol}\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2c)$$

$$y = 0\,; \qquad T = T_\infty \quad (2d)$$

$$y = L\,; \qquad k_{vol}\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (2e)$$

โดยที่

$$C_{vol} = \rho_s c_s g_s + \rho_l c_l g_l \quad (3)$$

$$k_{vol} = k_s g_s + k_l g_l \quad (4)$$

$$\delta H = \int_{T_{ref}}^{T}\left(\rho_l c_l - \rho_s c_s\right)d\theta \;+\; \rho_l \Delta H \quad (5)$$

สมการกำกับที่ได้มาจากการเขียนสมการการนำความร้อนในสองมิติจากปริมาตรควบคุมขนาดเล็กๆ ที่เรียกว่า representative elemental volume หรือ REV [5] โดยการแยกเขียนสมการในแต่ละเฟส เมื่อนำสมการทั้งสองเฟสมารวมกันจะได้สมการในรูปของของผสม (mixture equation) ซึ่งจะทำให้สมการกำกับดังกล่าวสามารถใช้ได้ทั้งบริเวณของแข็งและของเหลว สมการในรูปของของผสมนั้นสามารถเขียนได้ในหลายรูปแบบ สำหรับรูปแบบที่นำมาใช้ในงานวิจัยชิ้นนี้เป็นรูปแบบของความร้อนแฝง (latent heat source form) [4]

ค่า g_s และ g_l ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (1), (3-5) คือค่าอัตราส่วนของแข็งและอัตราส่วนของเหลวในเชิงปริมาตร (solid and liquid volume fraction) ตามลำดับ ซึ่งจะมีความสัมพันธ์กันคือ

$$g_s + g_l = 1 \quad (6)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (1) จะพบว่าในบริเวณของแข็งหรือของเหลวล้วนๆ โดยที่ไม่มีแนวโน้มว่าจะมีการเปลี่ยนเฟสนั้นจะมีค่า g_l เป็น 0 หรือ 1 ตามลำดับ ดังนั้นในบริเวณดังกล่าวพจน์สุดท้ายทางด้านขวามือของสมการที่ (1) หรือก็คือพจน์ของค่าความร้อนแฝงของการแข็งตัว (latent heat of fusion term) จะมีค่าเป็นศูนย์เนื่องจาก $\partial g_l / \partial t = 0$ นอกจากนั้นค่า C_{vol} และ k_{vol} ในบริเวณของแข็งหรือของเหลวล้วนๆจะมีค่าเท่ากับค่าความจุความร้อนและค่าสภาพการนำความร้อนของเฟสนั้นๆที่ปรากฏอยู่ ส่งผลให้สมการที่ (1) สามารถลดรูปได้เป็นสมการการนำความร้อนของแต่ละเฟสได้ตามปกติ ในทางตรงกันข้ามหากมีการเปลี่ยนเฟสเกิดขึ้น ในกรณีของการแข็งตัวในสารบริสุทธิ์ค่า g_l จะเปลี่ยนจาก 0 ไปเป็น 1 โดยฉับพลัน (jump condition) ส่งผลให้พจน์ที่มีค่าความร้อนแฝงของการแข็งตัวมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งปรากฏการณ์ดังกล่าวจะเกิดบริเวณที่เป็นรอยต่อ (interface) ระหว่างเฟสของแข็งและเฟสของเหลวเท่านั้น

3. การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์

ในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อแก้สมการที่ (1-5) จะต้องทำการแปลงสมการให้อยู่ในรูปของสมการไร้มิติ ซึ่งสามารถทำได้โดยการนิยามตัวแปรต่อไปนี้

$$\tau=\frac{\alpha_s t}{W^2} \quad , \quad \xi=\frac{x}{W} \quad , \quad \eta=\frac{y}{L} \quad \text{และ} \quad \theta=\frac{T-T_f}{T_i-T_f} \tag{7}$$

เมื่อแทนค่าดังกล่าวลงไปในสมการที่ (1-5) จะได้ว่า

$$\frac{1+(R_\rho R_c-1)}{1+(R_k-1)g_l}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}+\frac{R_k-1}{1+(R_k-1)g_l}\frac{\partial g_l}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+R_s^2\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}$$
$$+\frac{(R_k-1)R_s^2}{1+(R_k-1)g_l}\frac{\partial g_l}{\partial\eta}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}-\frac{(R_\rho R_c-1)\theta+(R_\rho/Ste)}{1+(R_k-1)g_l}\frac{\partial g_l}{\partial\tau} \tag{8}$$

$$\tau=0\,; \qquad \theta=1 \tag{9a}$$
$$\xi=0\,; \qquad \theta=\theta_\infty \tag{9b}$$
$$\xi=1\,; \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\xi}=0 \tag{9c}$$
$$\eta=0\,; \qquad \theta=\theta_\infty \tag{9b}$$
$$\eta=1\,; \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\eta}=0 \tag{9c}$$

จะเห็นได้ว่าพจน์สุดท้ายทางด้านขวามือของสมการที่ (1) จะเปลี่ยนรูปไปเป็นพจน์สุดท้ายทางด้านขวามือของสมการที่ (8) โดยการตั้งสมมุติฐานว่าค่า $\rho_l c_l-\rho_s c_s$ ในสมการที่ (5) เป็นค่าคงที่ และค่า T_{ref} มีค่าเท่ากับ T_f นอกจากนี้จำนวนพจน์ที่เพิ่มขึ้นในสมการที่ (8) มาจากการที่ค่า k_{vol} ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (1) เป็นฟังก์ชั่นของ g_l จากการสังเกตสมการที่ (8-9) จะพบว่ามีพารามิเตอร์ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (8-9) มีทั้งหมดหกตัวกล่าวคือ

$$R_\rho=\frac{\rho_l}{\rho_s} \quad , \quad R_c=\frac{c_l}{c_s} \quad , \quad R_k=\frac{k_l}{k_s} \quad ,$$
$$R_s=\frac{W}{L} \quad , \quad Ste=\frac{c_s(T_f-T_i)}{\Delta H} \quad , \quad \theta_\infty=\frac{T_\infty-T_f}{T_i-T_f} \tag{10}$$

4. การวิเคราะห์โดยวิธีผลต่างสืบเนื่อง

สมการที่ (8) ข้างต้นสามารถแก้ได้โดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference) เนื่องจากสมการที่ (8) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบ parabolic เพื่อให้เกิดเสถียรภาพในการทำงานของอัลกอริทึม จึงเลือกใช้การประมาณโดยวิธีผลต่างสืบเนื่องในรูปแบบ fully implicit [6] ดังนั้นตัวแปรที่ติดอยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับสองและหนึ่งจะสามารถแทนได้ด้วยการประมาณแบบผลต่างสืบเนื่องดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}=\frac{\theta^{n+1}_{i+1,j}-2\theta^{n+1}_{i,j}+\theta^{n+1}_{i-1,j}}{\Delta\xi^2} \;,\; \frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}=\frac{\theta^{n+1}_{i,j+1}-2\theta^{n+1}_{i,j}+\theta^{n+1}_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} \;,$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=\frac{\theta^{n+1}_{i+1,j}-\theta^{n+1}_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \;,\; \frac{\partial\theta}{\partial\eta}=\frac{\theta^{n+1}_{i,j+1}-\theta^{n+1}_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \;,\; \frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{\theta^{n+1}_{i,j}-\theta^{n}_{i,j}}{\Delta\tau} \tag{11}$$

โดยที่ i, j และ n คือดัชนีของโหนดในแกน ξ, η และ τ ตามลำดับ เมื่อนำสมการที่ (11) ที่อยู่ด้านบนไปแทนลงในสมการที่ (8) แล้วจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของสมการผลต่างสืบเนื่อง จะได้ว่า

$$\left(1-K\frac{\Delta\xi}{2}\right)\theta^{n+1}_{i-1,j}+\left(1+K\frac{\Delta\xi}{2}\right)\theta^{n+1}_{i+1,j}+\left(P-Q\frac{\Delta\eta}{2}\right)\frac{\Delta\xi^2}{\Delta\eta^2}\theta^{n+1}_{i,j-1}$$
$$+\left(P+Q\frac{\Delta\eta}{2}\right)\frac{\Delta\xi^2}{\Delta\eta^2}\theta^{n+1}_{i,j+1}-\left(2+2P\frac{\Delta\xi^2}{\Delta\eta^2}+J\frac{\Delta\xi^2}{\Delta\tau}\right)\theta^{n+1}_{i,j}$$
$$=\;-\left(J\frac{\Delta\xi^2}{\Delta\tau}\right)\theta^{n}_{i,j}\;+\;S\Delta\xi^2 \tag{12}$$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ J, K, P, Q และ S คือ

$$K=\frac{R_k-1}{1+(R_k-1)g_l}\frac{\partial g_l}{\partial\xi} \,,\, J=\frac{1+(R_\rho R_c-1)}{1+(R_k-1)g_l} \,,\, P=R_s^2 \,,$$
$$Q=\frac{(R_k-1)R_s^2}{1+(R_k-1)g_l}\frac{\partial g_l}{\partial\eta} \,,\, S=\frac{(R_\rho R_c-1)\theta+(\frac{R_\rho}{Ste})}{1+(R_k-1)g_l}\frac{\partial g_l}{\partial\tau} \tag{13}$$

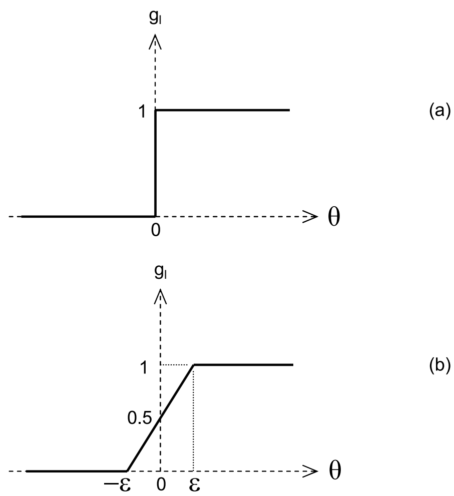
สำหรับการแข็งตัวของสารบริสุทธิ์ จะพบว่าการแข็งตัวจะเกิดขึ้นที่อุณหภูมิคงที่ ณ รอยต่อระหว่างของแข็งและของเหลวที่มีลักษณะที่เป็นรอยต่อเรียบ (sharp interface) ซึ่งในทางทฤษฎีแล้วค่าของ g_l จะมีความสัมพันธ์โดยตรงกับอุณหภูมิในลักษณะของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง (discontinuous function) กล่าวคือ

$$g_l=\begin{cases} 0\,, & If\ \theta\le 0 \\ 1\,, & If\ \theta>0 \end{cases} \tag{14}$$

การนำสมการที่ (14) มาใช้ จะพบว่าสมการดังกล่าวจะก่อให้เกิดการลู่ออกของคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้ในลักษณะของการแกว่ง (oscillated solution) เนื่องจากการเปลี่ยนอย่างฉับพลัน (jump condition) ของค่า g_l [3] ดังนั้นเพื่อขจัดปัญหาดังกล่าว จึงต้องทำการปรับเปลี่ยนความสัมพันธ์ระหว่าง g_l และอุณหภูมิเสียใหม่ให้เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่มีลักษณะของความต่อเนื่อง (continuous linear function) เกิดขึ้น [4]

$$g_l=\begin{cases} 0 & ,\ If\ \theta\le-\varepsilon \\ \dfrac{\theta+\varepsilon}{2\varepsilon}, & If\ -\varepsilon<\theta\le\varepsilon \\ 1 & ,\ If\ \theta>\varepsilon \end{cases} \tag{15}$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง g_l และ θ ก่อนและหลังทำการปรับสามารถนำมาแสดงให้เห็นได้ในรูปที่ 2



รูปที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของเหลวและอุณหภูมิ (a) ก่อนการปรับ (b) หลังการปรับ

จะเห็นได้ว่าค่า ε เป็นค่าที่แสดงถึงระยะความกว้างของฟังก์ชันของอัตราส่วนของเหลวที่ทำการสมมุติขึ้น ในทางกายภาพหาก $\varepsilon \rightarrow 0$ จะทำให้ความสัมพันธ์ระหว่าง g_l และ θ เป็นดังสมการที่ (14) ดังนั้นหากทำการตั้งค่า ε ให้มีค่าต่ำ ข้อดีคือจะทำให้ความแม่นยำของคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้มีค่าเพิ่มขึ้น ในขณะเดียวกันข้อเสียที่ได้รับก็คือคำตอบเชิงตัวเลขก็จะลู่เข้าได้ยากขึ้นเช่นกัน

สมการที่ (12-13) จะก่อให้เกิดระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นเพราะเนื่องจากค่าสัมประสิทธิ์ K, L, Q และ S ยังเป็นฟังก์ชันของ g_l ซึ่งยังไม่ทราบค่า ดังนั้นในตอนเริ่มต้นจะต้องทำการสมมุติค่า g_l จากสมการที่ (15) โดยใช้อุณหภูมิตั้งต้นก่อน จากนั้นสมการที่ (12-13) กลายเป็นระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูปแถบ (banded system) และสามารถหาการกระจายของอุณหภูมิที่โหนดต่างๆ ได้โดยวิธีของเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidal method) จากผลของการทดสอบโปรแกรมในเบื้องต้นพบว่า S หรือ source term ในสมการที่ (12-13) จะส่งผลอย่างมากต่อการลู่เข้าของคำตอบ [4] ดังนั้นจึงต้องมีการนำเอาค่า relaxation factor มาประยุกต์ใช้ โดยที่ค่า relaxation factor ที่ใช้จะอยู่ประมาณ 0.04 ถึง 0.06 ซึ่งเป็นค่าที่ค่อนข้างต่ำ (under relaxation factor) หลังจากที่ได้ค่าการกระจายของอุณหภูมิแล้วก็นำไปแทนค่าในสมการที่ (18) เพื่ออัพเดทค่าของ g_l และนำค่า g_l ดังกล่าวไปแทนระบบสมการเพื่อหาอุณหภูมิอีกครั้งในลักษณะของการคำนวณซ้ำ (iteration) จนกว่าค่าความผิดพลาดของคำตอบจะน้อยกว่าค่าที่กำหนดไว้ (tolerance) ซึ่งตั้งค่าไว้ที่ 10^{-8} เมื่อโปรแกรมออกจากลูปดังกล่าวก็จะทำการบันทึกค่าการกระจายของอุณหภูมิและความหนาของน้ำแข็งแล้วเริ่มทำการคำนวณในเวลาถัดไปจนกระทั่งสิ้นสุดระยะเวลาที่กำหนด

ในงานวิจัยชิ้นนี้จะทำการเปรียบเทียบคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้กับผลเฉลยแม่นตรงในสองมิติ [7] ซึ่งเป็นการแข็งตัวในสองมิติของระยะกึ่งอนันต์ในแนวแกน x และ y สมการของรอยต่อระหว่างสองเฟสจะประมาณให้อยู่ในรูปฟังก์ชั่นซูเปอร์ไฮเปอร์โบล่า สมการของรอยต่อระหว่างสองเฟสดังกล่าวจะนำไปใช้หาค่าผลเฉลยแม่นตรงซึ่งค่อนข้างจะมีความซับซ้อนเนื่องจากเป็นสมการผสมระหว่างอนุพันธ์และอินทิกรัล และจะต้องใช้วิธีของเกาส์-ควอดเรเจอร์ (Gauss-Quadrature) ในการทำให้สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ นอกจากนี้หากพิจารณาเปรียบเทียบปัญหาของผลเฉลยแม่นตรง จะพบว่ามีความแตกต่างจากปัญหาในงานวิจัยชิ้นนี้เนื่องจากโดเมนในการคำนวณมีค่าจำกัด (finite domain) ในทางกายภาพถ้าการแข็งตัวเกิดขึ้นในระยะเวลาอันสั้นก่อนที่การถ่ายเทความร้อนจะแพร่ไปยังระยะที่ x = W หรือ y = L ปัญหาการแข็งตัวในโดเมนที่จำกัดจะมีความคล้ายคลึงกับปัญหาการแข็งตัวในโดเมนที่มีระยะกึ่งอนันต์ ทำให้คำตอบของการคำนวณเชิงตัวเลขจะลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นตรงที่กล่าวมาและสามารถนำมาเปรียบเทียบกันได้

ค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (10) จะสามารถหาได้จากค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของน้ำและน้ำแข็ง ซึ่งคำตอบแม่นตรงจากแหล่งอ้างอิง [7] ได้กำหนดให้ค่าความหนาแน่น ค่าสภาพการนำความร้อน และ ค่าความจุความร้อนจำเพาะของเฟสของแข็งและของเหลวมีค่าเท่ากัน ดังนั้นในงานวิจัยชิ้นนี้เพื่อที่จะสามารถนำเอาคำตอบแม่นตรงมาเปรียบเทียบกับคำตอบเชิงตัวเลขที่คำนวณได้ จึงกำหนดค่าคุณสมบัติของเฟสของแข็งและของเหลวในตารางที่ 1 ซึ่งเป็นค่าดังกล่าวเป็นการเฉลี่ยค่าคุณสมบัติของน้ำและน้ำแข็งนั่นเอง

ตารางที่ 1 ค่าคุณสมบัติของเฟสของแข็งและของเหลว

คุณสมบัติ	ค่าที่ใช้
$\rho_s = \rho_l$ (kg/m^3)	960
$k_s = k_l$ (W/m-K)	1.2245
$c_s = c_l$ (J/kg-K)	3,128.5
ΔH (kJ/kg)	333.7

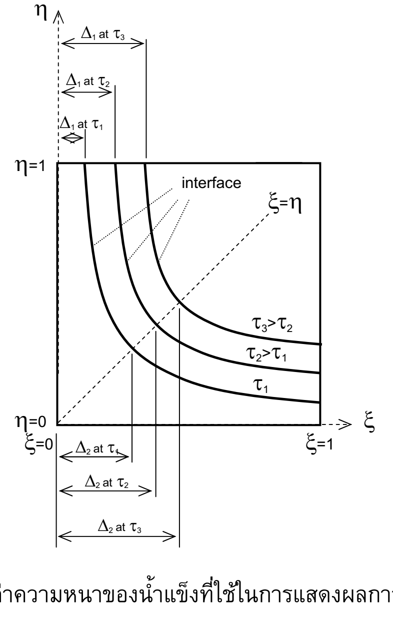
สำหรับค่าของอุณหภูมิตั้งต้นของน้ำ (T_i) มีค่าเท่ากับ 20°C และอุณหภูมิที่เงื่อนไขขอบเขต (T_∞) มีค่า -20°C ในขณะที่อุณหภูมิเยือกแข็งของน้ำ (T_f) มีค่า 0°C ส่วนระยะ W และ L มีค่าเท่ากันซึ่งเท่ากับ 0.125 m ดังนั้นจากตารางที่ 1 และค่าที่กำหนดไว้ข้างต้น จะสามารถคำนวณค่าของพารามิเตอร์ต่างๆ ตามสมการที่ (10) ได้ดังนี้

$$R_\rho = 1 \ , \ \ R_c = 1 \ , \ \ R_k = 1 \ ,$$
$$R_s = 1 \ , \ \ Ste = 0.1875 \ , \ \ \theta_\infty = -1 \qquad (16)$$

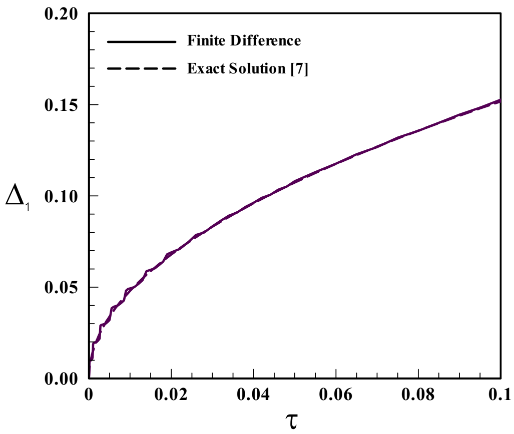
ในการคำนวณ จะใช้จำนวนกริดตามแนวแกน ξ และ η เป็นจำนวน 100×100 กริด สำหรับช่วงเวลาในการคำนวณจะเริ่มจากที่ τ=0 จนไปสิ้นสุดที่เวลา τ=0.1 ซึ่งเทียบเท่ากับเวลาประมาณ 1 ชั่วโมง ทั้งนี้ค่า $\Delta\tau$ หรือค่า time step จะมีค่าเริ่มต้นจาก 10^{-5} และเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆจนถึง 5×10^{-3} ส่วนค่า ε จะตั้งค่าไว้อยู่ที่ 0.025

5. ผลการคำนวณและการวิเคราะห์

ผลการคำนวณนั้นจะแสดงให้อยู่ในรูปของค่าความหนาของน้ำแข็งที่สองตำแหน่ง นั่นคือค่าความหนาของน้ำแข็งโดยวัดตามแนวแกน ξ ที่เส้น η=1 (Δ_1) และค่าความหนาของน้ำแข็งโดยวัดตามแนวแกน ξ ที่เส้น $\xi=\eta$ (Δ_2) ซึ่งแสดงให้เห็นในรูปที่ 3

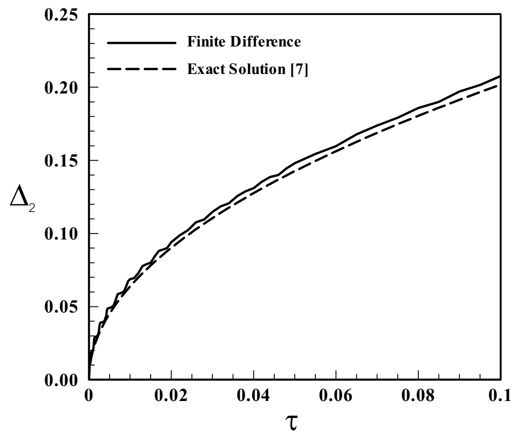


รูปที่ 3 ค่าความหนาของน้ำแข็งที่ใช้ในการแสดงผลการคำนวณ



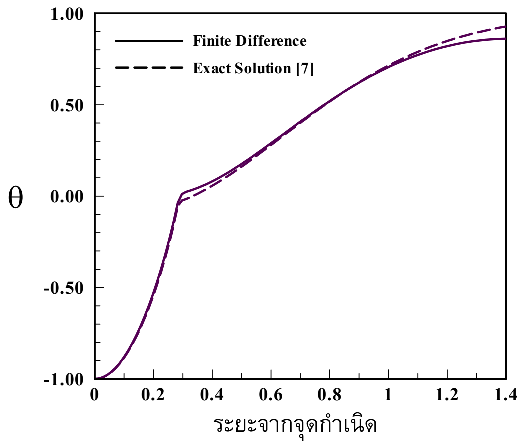
รูปที่ 4 การเปรียบเทียบค่า Δ_1 ระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่เวลาต่างๆ

รูปที่ 4 เป็นการเปรียบเทียบการหาค่า Δ_1 ที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรงกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่เวลาต่างๆ ในทางกายภาพค่า Δ_1 เป็นค่าความหนาของน้ำแข็งที่เส้น η=1 ซึ่งถ้าระยะเวลาในการแข็งตัวยังไม่นานเพียงพอ ผลของการแข็งตัวของผนังด้านแกน ξ ในรูปที่ 3 จึงยังส่งมาไม่ถึงบริเวณเส้น η=1 ทำให้ค่า Δ_1 ลู่เข้าสู่ค่าความหนาของน้ำแข็งในปัญหาการแข็งตัวในหนึ่งมิตินั่นเอง ดังนั้นการหาค่า Δ_1 จึงเป็นการตรวจสอบว่าผลการคำนวณที่ได้ว่าสอดคล้องกับลักษณะทางกายภาพที่เกิดขึ้นจริงหรือไม่ จากรูปที่ 4 พบว่าคำตอบที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรงกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขมีค่าใกล้เคียงกัน โดยที่มีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยอยู่ที่ร้อยละ 6.0 และค่าความคลาดเคลื่อนที่เวลาสุดท้าย (τ=0.1) อยู่ที่ร้อยละ 0.6 จะเห็นได้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนจะมีค่าค่อนข้างสูงในช่วงเริ่มต้นของการแข็งตัวเนื่องจากมีการแกว่งของคำตอบ (oscillated solution) ในระดับต่ำๆอยู่รอบๆ ค่าที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรง และลักษณะของการแกว่งดังกล่าวจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่าน ส่งผลให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลง



รูปที่ 5 การเปรียบเทียบค่า Δ_2 ระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่เวลาต่างๆ

รูปที่ 5 เป็นการเปรียบเทียบการหาค่า Δ_2 ที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรงกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขเลขที่เวลาต่างๆ สำหรับค่า Δ_2 นั้นจะเป็นค่าความหนาของน้ำแข็งจากการแข็งตัวในสองมิติโดยตรงเนื่องจากผลกระทบจากผนังทั้งสองข้างมีค่าเท่ากัน จากรูปจะเห็นได้ว่าลักษณะการเปลี่ยนแปลงของค่า Δ_2 จะมีความคล้ายคลึงกับ Δ_1 กล่าวคือลักษณะของการแกว่งของคำตอบยังคงปรากฏในช่วงระยะเวลาแรกของการแข็งตัวและการแกว่งจะลดลงเมื่อเวลาผ่านไป ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของ Δ_2 มีค่าประมาณร้อยละ 7.8 และค่าความคลาดเคลื่อนที่เวลาสุดท้าย (τ=0.1) มีค่าประมาณร้อยละ 3.0 จะเห็นว่าค่าความคลาดเคลื่อนของ Δ_2 จะมีค่าสูงกว่า Δ_1 ทั้งนี้เนื่องจากผลกระทบของการแข็งตัวในสองมิติและการประมาณค่าความหนาของน้ำแข็งโดยการใช้ฟังก์ชั่นของผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 5 การเปรียบเทียบค่า Δ_2 ระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่เวลาต่างๆ

การเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิบนเส้น ξ=η ที่เวลา τ=0.1 ระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขจะแสดงให้เห็นในรูปที่ 6 ทั้งนี้แกนนอนของกราฟในรูปที่ 6 จะเป็นระยะที่วัดจากจุดที่วัดอุณหภูมิไปยังจุดกำเนิดซึ่งจะทำมุม 45 องศาจากแกน ξ ของโดเมนการคำนวณ จากรูปจะเห็นได้ว่าค่าการกระจายอุณหภูมิจะมีค่าความคลาดเคลื่อนค่อนข้างสูงที่บริเวณรอยต่อระหว่างเฟสและที่ระยะไกลจากจุดกำเนิดเข้าไปในบริเวณที่เป็นของเหลว ซึ่งความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของ θ โดยอ้างอิงกับค่า θ สูงสุด จะค่าประมาณร้อยละ 1.7 ทั้งนี้ค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดบริเวณรอยต่อเป็นผลมาจากการใช้ค่า ε ทำให้การแข็งตัวเกิดขึ้นบนช่วงของอุณหภูมิดังที่แสดงในรูปที่ 2 ส่วนความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นบริเวณของเหลวที่ไกลจากจุดกำเนิดนั้นมาจากผลของระยะโดเมนที่จำกัดในการคำนวณเชิงตัวเลข

6. สรุป

ในงานวิจัยชิ้นนี้เป็นการศึกษาเทคนิคของการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบกริดคงที่เพื่อแก้ไขปัญหาการแข็งตัวของสารบริสุทธิ์ในสองมิติ ซึ่งจะนำคำตอบเชิงตัวเลขดังกล่าวไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่น

ตรง ผลการศึกษาพบว่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของคำตอบจากการคำนวณเชิงตัวเลขในการหาค่าความหนาของน้ำแข็งโดยวัดตามแนวแกน ξ ที่เส้นและค่าความหนาของน้ำแข็งโดยวัดตามแนวแกน ξ ที่เส้น $\xi=\eta$ จะอยู่ที่ร้อยละ 6.0 และ 7.8 ตามลำดับ ในขณะที่เมื่อทำการเปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิบนเส้น $\xi=\eta$ ที่เวลา τ=0.1 พบว่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยของอุณหภูมิมีค่าประมาณร้อยละ 1.7 จะเห็นได้ว่าผลที่ได้การทำนายจากการคำนวณเชิงตัวเลขและผลเฉลยแม่นตรงมีค่าใกล้เคียงกัน

สัญลักษณ์

(i) ตัวปรกติ

c = ค่าความจุความร้อนจำเพาะ, (J/kg-K)
C = ค่าความจุความร้อน, (J/m^3-K)
D = ความหนาของผนังท่อทำน้ำแข็ง, (m)
g = อัตราส่วนเชิงปริมาตรของแต่ละเฟส
δH = พจน์ของ heat source , (J/m^3)
ΔH = ความร้อนแฝงจำเพาะของการแข็งตัวของน้ำ, (J/kg)
J = ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการผลต่างสืบเนื่อง
k = สภาพการนำความร้อน, (W/m-K)
K = ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการผลต่างสืบเนื่อง
L = ความยาวของระบบในแนวแกน y, (m)
P = ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการผลต่างสืบเนื่อง
Q = ค่าสัมประสิทธิ์ในสมการผลต่างสืบเนื่อง
R_ρ = อัตราส่วนของค่าความหนาแน่นของน้ำต่อน้ำแข็ง
R_c = อัตราส่วนของค่าความจุความร้อนจำเพาะของน้ำต่อน้ำแข็ง
R_k = อัตราส่วนของค่าสภาพการนำความร้อนของน้ำต่อน้ำแข็ง
R_s = อัตราส่วนของความกว้างต่อความยาวของระบบ
Ste = สเตฟานนัมเบอร์
t = เวลา, (s)
T = อุณหภูมิ, (^{0}C)
T_f = อุณหภูมิเยือกแข็ง, (^{0}C)
T_i = อุณหภูมิตั้งต้น, (^{0}C)
T_∞ = อุณหภูมิที่เงื่อนไขขอบเขต, (^{0}C)
x = ระยะในระบบพิกัดฉาก, (m)
y = ระยะในระบบพิกัดฉาก, (m)
W = ความกว้างของระบบในแนวแกน x, (m)
α = Thermal diffusivity, (m^2/s)
ε = ระยะความกว้างของฟังก์ชันของอัตราส่วนของเหลว
ρ = ความหนาแน่น, (kg/m^3)
θ = อุณหภูมิในรูปไร้มิติ
θ_∞ = อุณหภูมิในรูปไร้มิติที่เงื่อนไขขอบเขต
ξ = ระยะ x ในในรูปไร้มิติในระบบพิกัดฉาก
η = ระยะ y ในในรูปไร้มิติในระบบพิกัดฉาก
τ = เวลาในรูปไร้มิติ

(ii) ตัวห้อย

l = เฟสของเหลว
s = เฟสของแข็ง
vol = representative elemental volume

เอกสารอ้างอิง

[1] Özisik, M. N., 1993. Heat Conduction. John-Wiley & Sons, New York, USA, pp. 392-398.
[2] Crank, J., 1984. Free and Moving Boundary Problem. Clarendon Press, Oxford.
[3] Salcudean, M. and Abdullah, Z., 1988. On the Numerical Modeling of Heat Transfer During Solidification Processes. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 25, pp. 445-473.
[4] Voller, V. R. and Swaminathan, C. R., 1990. Fixed Grid Techniques for Phase Change Problems: a Review. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, pp. 875-898.
[5] Ni, J. and Beckermann, C, 1991. A Volume-Averaged Two-Phase Model for Transport Phenomena during Solidification. Metallurgical Transactions B, Vol. 22, pp. 339-361.
[6] Chapra, S. C. and Canale, R. P., 1990. Numerical Methods for Engineers. McGraw-Hill, New York, USA, pp. 738-741.
[7] Rathjen, K. A. and Jiji, L. M., 1971. Heat Conduction with Melting or Freezing in a Corner. Journal of Heat Transfer, Vol. 93, pp. 101-109.