การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น โดยวิธีระบุเอกลักษณ์ของระบบ

Mathematical Model of Linear Viscoelastic Materials using System Identification Method

อัษฎายุทธ รอดพ่าย และจิระพล ศรีเสริฐผล
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
อ. เมือง จ.นครราชสีมา 30000
โทร (044)224412 โทรสาร (044) 224413, E-mail: jiraphon@sut.ac.th

บทคัดย่อ: การศึกษาและวิเคราะห์เกี่ยวกับแบบจำลองคณิตศาสตร์ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น เป็นการตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างอินพุท (ความเค้น หรือ ความเครียด) ที่กระทำต่อวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น กับ เอาพุท (ความเครียด หรือ ความเค้น) ที่เกิดขึ้นจากการตอบสนองของวัสดุ ซึ่ง โดยทั่วไปแบบจำลองที่ใช้กับวัสดุที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น ได้แก่ แบบจำลองของแมกซ์เวลล์ (Maxwell model) แบบจำลองเคลวิน-โวค (Kelvin-Voigt model) และแบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน(Standard Linear model) ซึ่งไม่สามารถอธิบายคุณสมบัติของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ถูกต้อง อาทิเช่น แบบจำลองแมกซ์เวลล์จะไม่มีคุณสมบัติของการคืนรูป(Recovery) แบบจำลองเคลวิน-โวคจะไม่มีคุณสมบัติการการพักความเค้น (Stress Relaxation) และแบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐานจะใช้อธิบายได้ดีสำหรับของแข็งที่สามารถคืนตัวได้ 100 % เท่านั้น ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาวิธีการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นที่แสดงอยู่ในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอน(Transfer function) ที่สามารถอธิบายคุณสมบัติของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ถูกต้อง ซึ่งลักษณะดังกล่าวสามารถใช้หลักการทฤษฎีควบคุมในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นโดยวิธีระบุเอกลักษณ์ โดยใช้ข้อมูลที่ได้จากการวัดคือ พลังงานสะสม(Storage modulus) $G'(\omega)$ พลังงานที่สูญเสีย(Loss modulus) $G''(\omega)$ และความถี่ (ω) ที่กระทำต่อวัสดุ ไปประเมินค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด และ วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วยความถี่และค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูล

คำสำคัญ: กลศาสตร์ของวัสดุ, ทฤษฎีการควบคุม, วิธีระบุเอกลักษณ์ของระบบ

Abstract : The study and analysis of mathematical models of linear viscoelastic materials aims to investigate the relationship between input (stress or strain) on such materials and output (strain or stress) that occurs from the response of such materials. Generally, the mathematical models used for linear viscoelastic materials are the Maxwell model, the Kevin-Voigt model and the standard linear model. These models cannot accurately describe the properties of linear viscoelastic materials. For instance, the Maxwell model does not show the recovery behavior of materials, the Kevin-Volgt model does not demonstrate the stress relaxation and the standard linear model can be applied well only for solid materials that can be recovered 100 %. This paper is aimed to identify the mathematical model of linear viscoelastic materials. The model can be expressed in terms of transfer function that can accurately describe the properties of linear viscoelastic materials. The control theory can be used to find out the mathematical model of linear viscoelastic materials using the system identification method for which the storage modulus $G'(\omega)$, loss modulus $G''(\omega)$ and input frequency (ω) obtained from the measurement are used. To determine the transfer function coefficients, the least square method, the weighting least square method with input frequency and the weighting least square method with variance are used.

Keywords: Mechanics of Materials, Control Theory, System Identification

1. บทนำ

ปัญหาที่พบในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นคือแบบจำลองที่ได้ไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมของวัสดุได้ถูกต้อง งานวิจัยนี้ได้นำเสนอวิธีการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอนของวัสดุ โดยอาศัยคุณสมบัติความยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นของวัสดุเป็นการระบุเอกลักษณ์ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นวิธีหนึ่งโดยใช้หลักการทางทฤษฎีควบคุมอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างอินพุทและเอาท์พุทที่กระทำต่อวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น ดังนั้นฟังก์ชันการถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นที่ได้จึงมีความถูกต้องในการวิเคราะห์ด้านสถิตศาสตร์ และพลวัตของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น

Levy [1] ได้นำเสนอเทคนิคในการสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอนโดยใช้ข้อมูลการตอบสนองเชิงความถี่Katkov *et al* [2] ได้สังเคราะห์ฟังก์ชั่นถ่ายโอนโดยใช้ข้อมูลค่าจริงและค่าจินตภาพของการตอบสนองเชิงความถี่ Whitfield [3] ได้นำเสนอวิธีระบุเอกลักษณ์ และเทคนิคเช่นเดียวกับ Levy โดยเพิ่มวิธีการถ่วงน้ำหนักซึ่งได้ผลที่ดีในช่วงความถี่ต่ำ Choe [4] ได้ทำการศึกษาวิธีสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอย่างง่าย จากข้อมูลขนาด และเฟส วิธีการกำลังสองน้อยสุด(Least square method) โดยพิจารณาระบบที่อยู่ในช่วงความถี่ต่ำ และ การถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega$ Kim *et al* [5] ได้นำเสนอวิธีกำลังสองน้อยสุด, Recursive Least Squares (RLS) และ Total Least-Square (TLS) ในการระบุเอกลักษณ์ของฟังก์ชั่นถ่ายโอนบนโดเมนความถี่ Luc Peirlinckxl *et al* [6] ได้ศึกษาวิจัยหาเอกลักษณ์ของสมการคอนสติติวทีฟ(Constitutive equations) สำหรับวัสดุเชิงประกอบ (Composite materials) ที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น Ping Yu *et al* [8] ได้ศึกษาวิธีการหาเอกลักษณ์ของระบบพลวัตของการตอบสนองทางรีโอโลยีของวัสดุยืดหยุ่นหนืด ซึ่งวิธีการนี้ถูกพัฒนาเพื่อหาค่าฟังก์ชันการพักความเค้น และการคืบของวัสดุ โดยพิจารณาในโดเมนของความถี่ ซึ่งเป็นการสมมติแบบจำลองในรูปแบบของฟังก์ชันถ่ายโอนด้วยวิธีการวิเคราะห์ระบบแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา(Discrete-time system) Kwang Soo Cho *et al* [9] ได้ทำการศึกษาหาแบบจำลองที่ได้จากการสังเกตสำหรับวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น ของโพลิเมอร์แบบไม่กระจายตัว ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ทำนายปรากฏการณ์โดยการพิจารณาเฉพาะผลกระทบของน้ำหนักโมเลกุลของพอลิเมอร์และวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นเท่านั้น ผลที่ได้คือแบบจำลองสามารถทำนายค่าพลังงานสะสม($G'(\omega)$) และพลังงานที่สูญเสีย($G''(\omega)$)ได้ งานวิจัยที่ได้กล่าวมานั้นเป็นเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้นที่ทำการศึกษาหาแบบจำลอง เพื่อวิเคราะห์พฤติกรรมต่างๆ ที่เกิดขึ้นกับวัสดุพอลิเมอร์ ซึ่งมีตัวแปรสำคัญที่สามารถวัดได้เช่น ความถี่ในการตอบสนอง ค่าพลังงานสะสม ค่าพลังงานสูญเสียของวัสดุยืดหยุ่นหนืด เป็นต้น

วัตถุประสงค์ในการวิจัยนี้ คือการนำข้อมูลที่วัดได้ พลังงานสะสม $G'(\omega)$ พลังงานที่สูญเสีย $G''(\omega)$ และความถี่ (ω) ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น มาสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอน ของวัสดุ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งการศึกษาเกี่ยวกับความยืดหยุ่นหนืดจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียดที่ไม่เป็นสัดส่วนคงที่แต่จะขึ้นอยู่กับเวลาในการตอบสนองของวัสดุ โดยวิธีระเบียบเชิงตัวเลข และ ทฤษฎีควบคุม นี้มาใช้ร่วมกับวิธีกำลังสองน้อยสุด, วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (Weighting least squares method) ในการสร้างสมการเชิงเส้นโดยมีค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนเป็นตัวแปรต้น และค่าที่ได้จากการทดลองในที่นี้คือ ค่าพลังงานสะสม ค่าพลังงานที่สูญเสีย และความถี่ เป็นตัวแปรตาม โดยใช้วิธีการ pseudo inverse ในการแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน ใช้วิธีหาค่ารากของสมการคุณลักษณะ(Characteristic equation) เพื่อหาตำแหน่งของโพลมาพิจารณาความเสถียรของวัสดุ และหาค่าความผิดพลาดจากนอร์มรากกำลังสอง(root-square norm: L_2-norm) ในการพิจารณาเปรียบเทียบความถูกต้องของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้ โดยขั้นตอนในการคำนวณโดยโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนนั้น แบ่งเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่หนึ่งเป็นการทดสอบโปรแกรมโดยชุดข้อมูลที่มีค่าความแปรปรวน แล้วใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน ทั้งแบบไม่ถ่วงน้ำหนัก และถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$, $1/\omega^2$, σ^2 และ $1/\sigma^2$ เพื่อหาสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอน และส่วนที่สองเป็นการใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนกับชุดข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

2. ลักษณะทางคณิตศาสตร์

ในการศึกษาคุณสมบัติเชิงพลวัตของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น สามารถวัดค่าพลังงานสะสม ค่าพลังงานที่สูญเสีย และค่า $\tan\delta$ ซึ่ง เป็นวิธีการที่ใช้ในการทดสอบเชิงพลวัตของวัสดุยืดหยุ่นหนืดสามารถจำแนกได้เป็น 3 แบบคือการสั่นแบบอิสระแบบมีความหน่วงการสั่นแบบอิสระแบบมีการสั่นพ้อง และการสั่นเนื่องจากแรงแบบไม่มีการสั่นพ้อง วิธีการเหล่านี้เป็นไปตามมาตรฐาน ISO6721 เพื่อใช้ในการทดสอบหาคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ ซึ่งลักษณะคุณสมบัติของการตอบสนองเชิงพลวัตโดยวิธีการสั่นแบบเฉือน โดยให้ความเครียดกระทำกับวัสดุยืดหยุ่นหนืดมีค่าเท่ากับ $\gamma = \gamma_0 \sin\omega t$ โดยค่า γ_0 คือค่าขนาดของความเครียด และ ω คือความถี่ที่ใช้กระตุ้นระบบ เราพบว่าความเค้นเฉือนที่ได้มีมุมเฟสที่แตกต่างจากค่าความเครียดเท่ากับค่าๆ หนึ่ง โดยมุมเฟสมีค่าต่างกัน ดังนั้นสมการการตอบสนองของความเค้นได้ดังสมการ

$$\tau(t) = \tau_0 \sin(\omega t + \delta) = \gamma_0 \left|G^*(j\omega)\right| \sin(\omega t + \delta) \quad (1)$$

โดย $\delta = \arctan\dfrac{G''}{G'}$ คือ มุมเฟสต่าง

$G^*(j\omega) = G'(\omega) + jG''(\omega)$ คือค่ามอดูลัสเชิงซ้อน(Complex modulus)

$$\left|G^*(j\omega)\right| = \sqrt{(G'(\omega))^2 + (G''(\omega))^2} \tag{2}$$

$$G'(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0}\cos\delta \quad \text{และ} \quad G''(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0}\sin\delta$$

$G'(\omega)$ คือพลังงานสะสม และ $G''(\omega)$ คือพลังงานที่สูญเสียเป็นความร้อนในระหว่างการเปลี่ยนรูป ในการวิเคราะห์ระบบ เมื่อให้อินพุทกับระบบแล้ว สังเกตพฤติกรรมการตอบสนองของเอาพุทที่เกิดขึ้น และจากสมการ(1) สามารถเขียนในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ ดังนี้

$$\tau(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{n} b_k (j\omega)^k}{\sum_{v=0}^{m} a_p (j\omega)^v}\gamma(j\omega) = G^*(j\omega)\gamma(j\omega) \tag{3}$$

โดย $n \le m$

ในการทดลองจะได้ค่า $G'(\omega)$ และ $G''(\omega)$ จากการเปลี่ยนแปลงความถี่ (ω_i) ในการเค้นเฉือนที่มีต่อวัสดุ ดังนั้นสมการ (3) สามารถเขียนอยู่ในรูปของมอดุลัสเชิงซ้อนได้

$$G^*(j\omega_i) = G'(\omega_i) + jG''(\omega_i) = \frac{B(j\omega_i)}{A(j\omega_i)}$$
$$= \frac{b_n (j\omega_i)^n + b_{n-1}(j\omega_i)^{n-1} + \cdots + b_1(j\omega_i) + b_0}{a_m (j\omega_i)^m + a_{m-1}(j\omega_i)^{m-1} + \cdots + a_1(j\omega_i) + 1} \tag{4}$$

โดยที่ $a_0 = 1$

จากสมการ (4) เขียนใหม่ได้

$$B(j\omega_i) = A(j\omega_i)\{G'(\omega_i) + jG''(\omega_i)\} \tag{5}$$

สมการ (5) สามารถจัดรูปให้อยู่ในค่า $G'(\omega_i)$ และ $G''(\omega_i)$ ได้

$$\sum_{h=0}^{p} b_{2h}(-1)\omega_i^{2h} - G'(\omega_i)\sum_{u=0}^{r} a_{2u}(-1)^u \omega_i^{2u} + G''(\omega_i)\sum_{v=0}^{s} a_{2v+1}(-1)^v \omega_i^{2v+1} = G'(\omega_i)$$

$$\sum_{l=0}^{p} b_{2l}(-1)\omega_i^{2l} - G''(\omega_i)\sum_{u=0}^{r} a_{2u}(-1)^u \omega_i^{2u} - G'(\omega_i)\sum_{v=0}^{s} a_{2v+1}(-1)^v \omega_i^{2v+1} = G''(\omega_i)$$

โดยกำหนดให้

$$p = \left[\frac{n}{2}\right], q = \left[\frac{(n-1)}{2}\right], r = \left[\frac{m}{2}\right], s = \left[\frac{(m-1)}{2}\right]$$

เราสามารถนำสมการข้างต้น มาเขียนอยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ 0 & \Omega_4 & \Omega_5 & \Omega_6 \end{bmatrix}\{b_{even} \quad b_{odd} \quad a_{even} \quad a_{odd}\}^T = \begin{Bmatrix} G' \\ G'' \end{Bmatrix} \tag{6}$$

โดย $b_{even} = b_2, b_4, ..., b_{2p}$, $b_{odd} = b_1, b_3, ..., b_{2q+1}$,

$a_{even} = a_0, a_2, ..., a_r$ และ $a_{odd} = a_1, a_3, ..., a_{2s+1}$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_1^2 & \omega_1^4 & \dots & (-1)^P \omega_1^{2P} \\ 1 & -\omega_2^2 & \omega_2^4 & \dots & (-1)^P \omega_2^{2P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -\omega_N^2 & \omega_N^4 & \dots & (-1)^P \omega_N^{2P} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 G_1' & -\omega_1^4 G_1' & \omega_1^6 G_1' & \cdots & (-1)^{r+1}\omega_1^{2r} G_1' \\ \omega_2^2 G_2' & -\omega_2^4 G_2' & \omega_2^6 G_2' & \cdots & (-1)^{r+1}\omega_2^{2r} G_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_N^2 G_N' & -\omega_N^4 G_N' & \omega_N^6 G_N' & \cdots & (-1)^{r+1}\omega_N^{2r} G_N' \end{bmatrix}$$

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} \omega_1 G_1'' & -\omega_1^3 G_1'' & \omega_1^6 G_1'' & \cdots & (-1)^s \omega_1^{2s+1} G_1'' \\ \omega_2 G_2'' & -\omega_2^3 G_2'' & \omega_2^6 G_2'' & \cdots & (-1)^s \omega_2^{2s+1} G_2'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_N G_N'' & -\omega_N^3 G_N'' & \omega_N^6 G_N'' & \cdots & (-1)^s \omega_N^{2s+1} G_N'' \end{bmatrix}$$

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} \omega_1 & -\omega_1^3 & \omega_1^5 & \dots & (-1)^q \omega_1^{2q+1} \\ \omega_2 & -\omega_2^3 & \omega_2^5 & \dots & (-1)^q \omega_2^{2q+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_N & -\omega_N^3 & \omega_N^5 & \dots & (-1)^q \omega_N^{2q+1} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_5 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 G_1'' & -\omega_1^4 G_1'' & \omega_1^6 G_1'' & \cdots & (-1)^{r+1}\omega_1^{2r} G_1'' \\ \omega_2^2 G_2'' & -\omega_2^4 G_2'' & \omega_2^6 G_2'' & \cdots & (-1)^{r+1}\omega_2^{2r} G_2'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_N^2 G_N'' & -\omega_N^4 G_N'' & \omega_N^6 G_N'' & \cdots & (-1)^{r+1}\omega_N^{2r} G_N'' \end{bmatrix}$$

$$\Omega_6 = \begin{bmatrix} \omega_1 G_1' & -\omega_1^3 G_1' & \omega_1^6 G_1' & \cdots & (-1)^s \omega_1^{2s+1} G_1' \\ \omega_2 G_2' & -\omega_2^3 G_2' & \omega_2^6 G_2' & \cdots & (-1)^s \omega_2^{2s+1} G_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_N G_N' & -\omega_N^3 G_N' & \omega_N^6 G_N' & \cdots & (-1)^s \omega_N^{2s+1} G_N' \end{bmatrix}$$

โดย N คือจำนวนชุดข้อมูล

3. วิธีระเบียบเชิงตัวเลข

ในการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด จากสมการ (6) เขียนได้ใหม่ ดังนี้

$$\Omega X = G \tag{7}$$

โดยที่ Ω คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์, X คือเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ และ G คือเวกเตอร์ที่ได้จากการวัด

ในการประยุกต์ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก และเขียนสมการ (7) ใหม่ ได้ดังนี้

$$w\Omega X = wG \tag{8}$$

โดย

$$w = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_N \end{bmatrix}_{k\times k} \tag{9}$$

โดยค่า w คือเมตริกซ์ถ่วงน้ำหนัก ที่เป็น เมตริกซ์ทะแยงมุม และ $k=2$ เท่าของจำนวนชุดข้อมูล ($2 \times N$) ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ ใช้ค่าในการถ่วงน้ำหนัก 4 แบบคือ

แบบที่ 1 กำหนดให้ $w_k = \dfrac{1}{\omega_k}$ (10)

แบบที่ 2 กำหนดให้ $w_k = \dfrac{1}{\omega_k^2}$ (11)

โดย $\omega_k = \begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_N & \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_N\end{bmatrix}_{1\times k}$

สำหรับ การถ่วงน้ำหนักแบบที่ 3 และ แบบที่ 4 จะใช้ค่าความแปรปรวน(Variance(σ^2)) ของชุดข้อมูล ซึ่งเป็นค่าการกระจายตัวของชุดข้อมูลนั้นๆ นั้นคือ

แบบที่ 3 กำหนดให้ $w_k = \sigma_k^2$ (12)

แบบที่ 4 กำหนดให้ $w_k = \dfrac{1}{\sigma_k^2}$ (13)

โดย

$\sigma_k^2 = \begin{bmatrix}\sigma_{1,G'}^2 & \sigma_{2,G'}^2 & \cdots & \sigma_{N,G'}^2 & \sigma_{1,G''}^2 & \sigma_{2,G''}^2 & \cdots & \sigma_{N,G''}^2\end{bmatrix}_{1\times k}$

โดยทั่วไป การหาเมตริกซ์ผกผัน Ω^{-1} ของเมตริกใดๆ นั้น เมตริกซ์ Ω นั้น ต้องเป็นเมตริกซ์จัตุรัส และต้องมีลักษณะเป็น full rank คือที่ทุกคอลัมน์ หรือแถวภายในเมตริก Ω ต้องมีความเป็นอิสระต่อกัน (Linearly independent) แต่ในการหาเมตริกซ์ผกผันเทียมนั้นเป็นวิธีการทั่วไปที่ใช้ในการหาเมตริกผกผัน ซึ่งใช้ในการหาเมตริกซ์ Ω ที่เป็นเมตริกจัตุรัส หรือเมตริกที่มีจำนวนแถวมากกว่าจำนวนคอลัมน์ แต่มีเงื่อนไขว่าเมตริกซ์นั้นต้องเป็นเมตริกที่มีลักษณะเป็น full rank เพื่อให้ผลเฉลยที่ได้ unique นั่นเอง ข้อดีอีกประการของวิธีการนี้ก็คือ เป็นวิธีการที่สามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้ ไม่ว่าเมตริก Ω จะเป็น singular matrix หรือ non-singular matrix คือ เมตริกซ์ที่ค่า $\det(\Omega)=0$ หรือ $\det(\Omega)\neq 0$ ตามลำดับ ซึ่งจะได้

$$X = \left(\Omega^T \Omega\right)^{-1} \Omega^T G \tag{14}$$

สำหรับเมตริกซ์ที่มีการถ่วงน้ำหนักด้วยเมตริกซ์ w

$$X = \left(\Omega^T w w^T \Omega\right)^{-1} \Omega^T w^T w G \tag{15}$$

ขั้นตอนต่อมาคือการวิเคราะห์หาความเสถียรของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้ โดยพิจารณาตำแหน่งโพลของระบบ โดยหาค่ารากสมการเฉพาะของระบบ ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จะต้องความเสถียรเพราะพิจารณาวัสดุยืดหยุ่นหนืดที่มีความเสถียร วิธีการหาผลเฉลยที่ให้ค่าที่มีความถูกต้องนั้น ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาค่าผลเฉลยกับฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่ได้ หาค่าความผิดพลาด(ε) มาร่วมพิจารณาในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ดีที่สุด

$$\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{N} \left| G^*(j\omega_i) - \frac{B(j\omega_i)}{A(j\omega_i)} \right|^2 \tag{16}$$

โดย ε คือค่าความผิดพลาด

แต่ค่าความผิดพลาดนั้นสามารถกำหนดได้หลายรูปแบบ เนื่องจากค่าความผิดพลาดของระบบสมการอยู่ในรูปเวกเตอร์ $\varepsilon = [\varepsilon_i]$ ดังนั้นการหาขนาดของค่าความผิดพลาดเพื่อใช้การพิจาณาคือค่าความผิดพลาดของระบบสมการนอร์มรากกำลังสอง

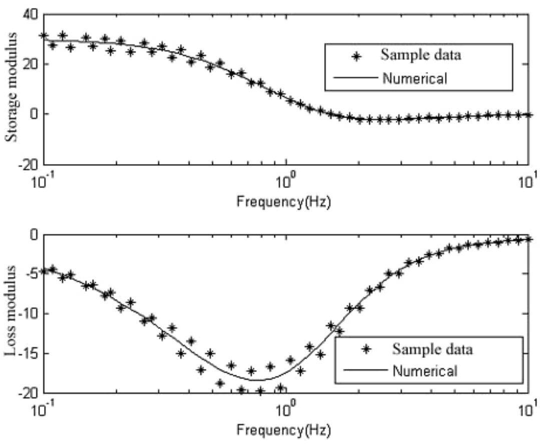
$$\|\varepsilon\|_2 = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots \varepsilon_N^2} \tag{17}$$

4. ผลการทดสอบและจำลองสถานการณ์

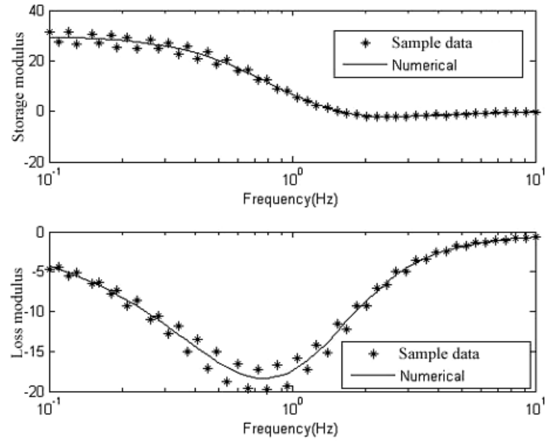
<u>กรณี 1</u>. ในการประเมินและวิเคราะห์โปรแกรมที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักนั้น ต้องมีการทดสอบความถูกต้อง ความแม่นยำ และความเสถียรของโปรแกรมนั้นๆ ก่อน สำหรับหัวข้อนี้เป็นการนำเสนอผลการทดสอบโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนบางส่วน โดยการนำโปรแกรมไปประยุกต์เข้ากับปัญหาที่ทราบฟังก์ชันถ่ายโอน จากนั้นนำผลที่ได้จากโปรแกรม เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหานั้นๆ ซึ่งได้มีการทดสอบฟังก์ชั่นถ่ายโอนตั้งแต่ $n=1$ ถึง 5 และ $m=1$ ถึง 5 โดยชุดข้อมูลมีจำนวนค่าที่วัด 50 ความถี่ ในช่วงความถี่ 10^{-1} ถึง 10^{1} Hz และมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล $\pm$10 % ผลตัวอย่างการทดสอบโปรแกรม โดยพิจารณาจากฟังก์ชั่นถ่ายโอนดังนี้

$$G^*(j\omega) = \frac{b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0}{a_3(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + 1} \tag{18}$$

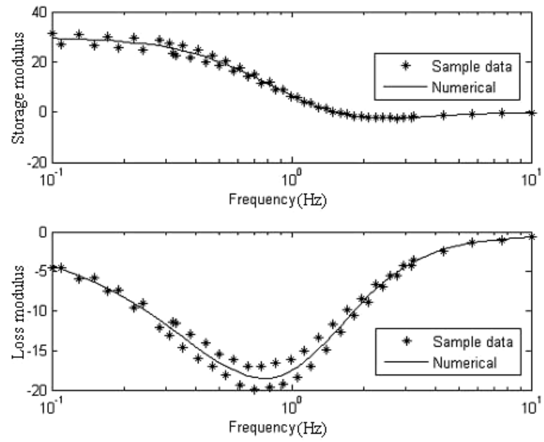
โดย $b_2 = 1, b_1 = 11, b_0 = 30, a_3 = 0.1667,\ a_2 = 1,$ $a_1 = 1.833$



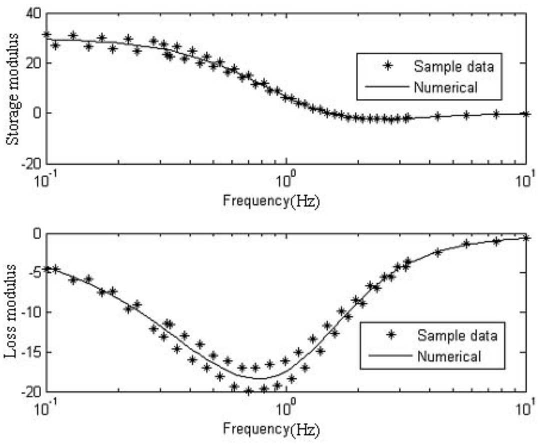
รูปที่ 1.แสดงค่า $G'(\omega_i)$ และ $G''(\omega_i)$ กับความถี่ ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $1/\omega$



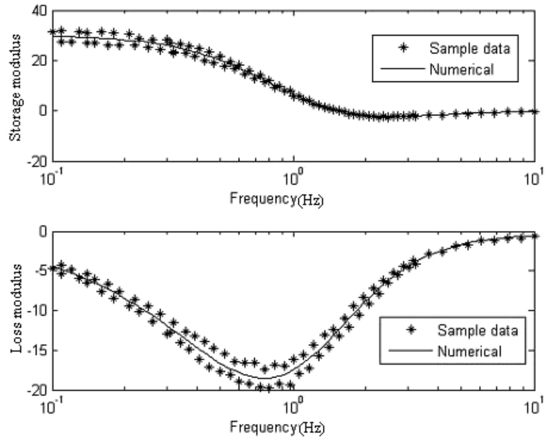
รูปที่ 2.แสดงค่า $G'(\omega_i)$ และ $G''(\omega_i)$ กับความถี่ ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\sigma^2\right)$



รูปที่ 3.ฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $1/\omega$ กับชุดข้อมูลที่มีการกระจายตัว



รูปที่ 4.ฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\sigma^2\right)$ กับชุดข้อมูลที่มีการกระจายตัว



รูปที่ 5.ฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $1/\omega$ กับชุดข้อมูลมีจำนวนค่าที่วัด 100 ความถี่

จากรูปที่ 1 และ 2 แสดงผลของการประเมินสำหรับฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่ทดสอบ (18) ซึ่งผลเฉลยของฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่ไม่มีความเสถียรจะไม่นำมาพิจารณา และค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดที่ได้คือวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega$, $\|\varepsilon\|_2 = 10.64$ และฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่ได้จากผลของวิธีระบุเอกลักษณ์ของระบบคือ

$$G^*(j\omega) = \frac{0.1334(j\omega)^2 + 3.662(j\omega) + 29.94}{1.537\times10^{-2}(j\omega)^3 + 0.6207(j\omega)^2 + 1.579(j\omega) + 1}$$

ส่วนค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\sigma^2$ และ $1/\omega^2$ คือ $\|\varepsilon\|_2 = 10.646$ และ $\|\varepsilon\|_2 = 10.75$

ส่วนรูปที่ 3 และ 4 แสดงผลของการประเมินสำหรับฟังก์ชั่นถ่ายโอนกับชุดข้อมูลที่มีการกระจายตัว ซึ่งวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega$, $\|\varepsilon\|_2 = 11.696$ และฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่ได้ คือ

$$G^*(j\omega) = \frac{7.067\times10^{-2}(j\omega)^2 + 2.922(j\omega) + 29.94}{0.5879(j\omega)^2 + 1.549(j\omega) + 1}$$

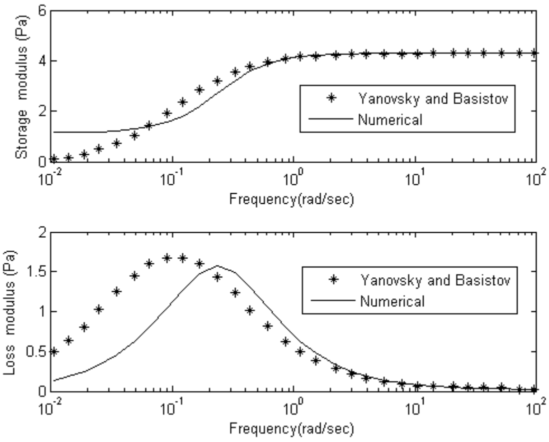
และค่าความผิดพลาดโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\sigma^2$ และ $1/\omega^2$ คือ $\|\varepsilon\|_2 = 11.678$ และ $\|\varepsilon\|_2 = 11.392$ และรูปที่ 5 แสดงผลการสังเคราะห์ฟังก์ชั่นถ่ายโอนเมื่อชุดข้อมูลจำนวนการวัดเพิ่มขึ้นเป็น 100ความถี่ในช่วงความถี่เดิม จากวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega$, $\|\varepsilon\|_2 = 14.265$ และฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่ได้

$$G^*(j\omega) = \frac{0.1619(j\omega)^2 + 3.606(j\omega) + 30.23}{1.532\times10^{-2}(j\omega)^3 + 0.6139(j\omega)^2 + 1.582(j\omega) + 1}$$

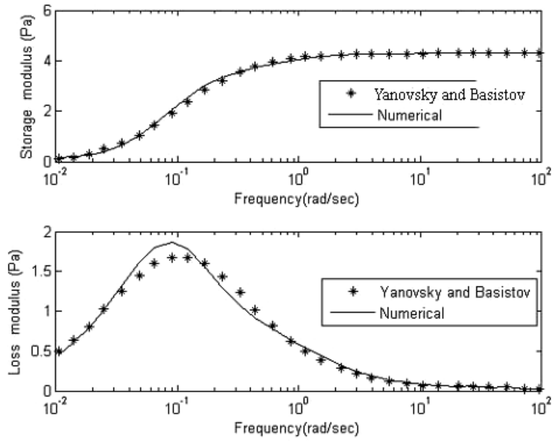
และค่าความผิดพลาดในกรณีนี้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\sigma^2$ และ $1/\omega^2$ คือ $\|\varepsilon\|_2 = 14.268$ และ $\|\varepsilon\|_2 = 14.414$ ผลของค่าความผิดพลาดที่เพิ่มขึ้นนั้น เพราะจำนวนข้อมูลที่เพิ่มขึ้นนั้นเอง

จากผลการทดสอบและจำลองสถานการณ์ในกรณีต่าง ๆที่พิจารณานั้น โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega$, $1/\omega^2$ และ $1/\sigma^2$ ในการสังเคราะห์ฟังก์ชั่นถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นมีประสิทธิภาพดีพอเพียง

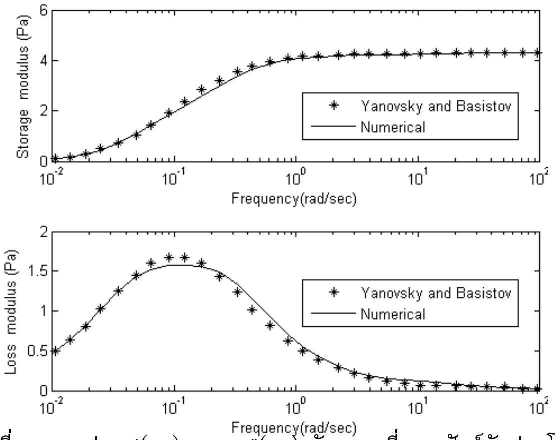
กรณี 2 การประยุกต์ใช้โปรแกรมกับปัญหายืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น
ตอนที่ 1. โปรแกรมที่ทำการเขียนขึ้นเพื่อสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนเมื่อผ่านกระบวนการทดสอบกับปัญหามาตรฐาน พบว่า มีความแม่นยำและมีเสถียรภาพ จึงได้นำโปรแกรมดังกล่าวมาประยุกต์ใช้กับปัญหายืดหยุ่นหนืด โดยการนำผลการทดลองที่ได้ มาทำการใช้ร่วมกับโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน โดยใช้ชุดข้อมูลจากการทดลองที่มีจำนวนค่าที่วัด 30 ความถี่ ในช่วงความถี่ 0.01-100 rad/sec ของ polybutadient polymer ที่มีน้ำหนักโมเลกุลเท่ากับ 8.3×10^{-4} kg (Yanovsky G. Yu., Basistov G. Yu. and Siginer A.Dennis. [7])



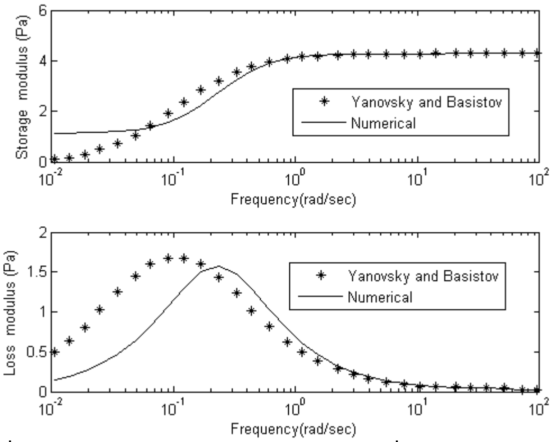
รูปที่ 6.แสดงค่า $G'(\omega_i)$ และ $G''(\omega_i)$ กับความถี่ ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด



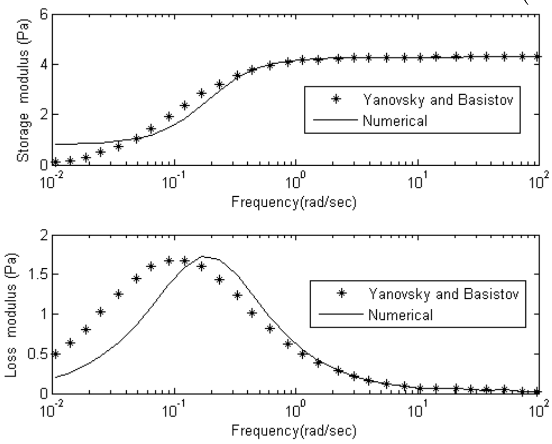
รูปที่ 7.แสดงค่า $G'(\omega_i)$ และ $G''(\omega_i)$ กับความถี่ ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$



รูปที่ 8.แสดงค่า $G'(\omega_i)$ และ $G''(\omega_i)$ กับความถี่ ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\omega^2\right)$



รูปที่ 9.แสดงค่า $G'(\omega_i)$ และ $G''(\omega_i)$ กับความถี่ ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(\sigma^2\right)$



รูปที่10.แสดงค่า $G'(\omega_i)$ และ $G''(\omega_i)$ กับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\sigma^2\right)$

จากรูปที่ 6 ถึง 10 แสดงผลของการสังเคราะห์ฟังก์ชั่นถ่ายโอน ซึ่งค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดที่ได้คือวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega^2$ และ $\|\varepsilon\|_2 = 0.588$ และฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่ได้

$$G^*(j\omega)=\frac{22.76(j\omega)^3+322.5(j\omega)^2+49.02(j\omega)+0.01968}{5.277(j\omega)^3+77.47(j\omega)^2+23.25(j\omega)+1}$$

ส่วนค่าความผิดพลาดน้อยที่เกิดขึ้นในลำดับถัดมา คือวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega$ และ $1/\sigma^2$ คือ $\|\varepsilon\|_2=0.5925$ และ $\|\varepsilon\|_2=2.076$

ตอนที่ 2. การประยุกต์โปรแกรมใช้กับ Linear low density polyethylene โดยใช้ metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา ซึ่งการทดลองนี้เป็นการศึกษาที่สถานะของเหลวในช่วงที่เกิดการหลอมละลาย โดยใช้ข้อมูลจากบทความวิจัยของ Esra Kucukpinar *et al* (1999) [10] ที่พิจารณาในช่วง 0.01 – 1000 rad/sec โดยใช้แบบจำลองWagner ซึ่งพบว่าแบบจำลองดังกล่าวสามารถหาค่าพลังงานสะสม ค่าพลังงานที่สูญเสียได้ถูกต้อง เป็นไปดังสมการที่ (19) และสมการที่ (20)

$$G'(\omega)=\sum_i\frac{G_{oi}\lambda_i^2\omega^2}{1+\lambda_i^2\omega^2} \qquad (19)$$

$$G''(\omega)=\sum_i\frac{G_{oi}\lambda_i\omega}{1+\lambda_i^2\omega^2} \qquad (20)$$

โดย λ_i – relaxation time และ G_{oi} – relaxation strength

ตารางที่ 1 แสดงค่า λ_i และ G_{oi} ของ Metallocene-catalyzed linear low density polyethylene resin ชนิด 350D60 ที่มีค่า M_W เท่ากับ 100,000 g/mol, Melt index เท่ากับ 1 g/10 min, Density เท่ากับ 0.917 g/cm^3, Melting point เท่ากับ 119 ^{o}C

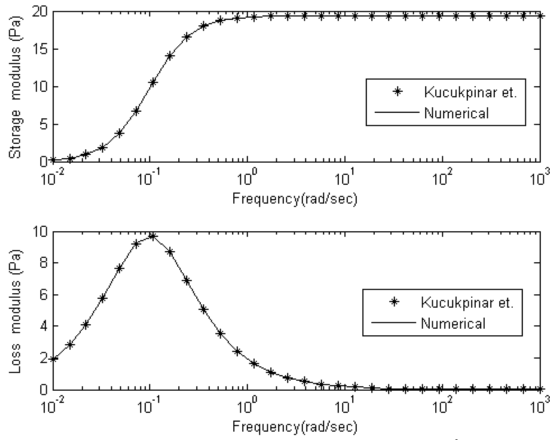
ตารางที่ 1 แสดงค่า λ_i และ G_{oi}

	Exceed 350D60
λ_i, sec	G_{oi}, Pa
10	1.94E+01
1	8.33E+02
0.1	3.93E+04
0.01	3.48E+05
0.001	3.70E+05
0.0001	1.00E+06

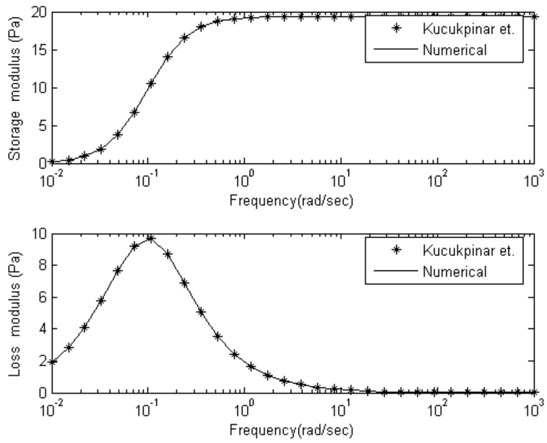
จากรูปที่11 ถึง 13 แสดงตัวอย่างผลการทดสอบโปรแกรมกับแบบจำลอง Wagner ของ Metallocene-catalyzed linear low density polyethylene resin ชนิด350D60 ที่มีค่า λ_i=10 secและ G_{oi}=19.4 Pa ในช่วงความถี่ 0.01-1000 rad/sec จำนวน 30ความถี่ ซึ่งค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดที่ได้คือวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega$, $\|\varepsilon\|_2=9.85\times10^{-3}$ และฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่ได้

$$G^*(j\omega)=\frac{2.987\times10^{-2}(j\omega)^2+194(j\omega)+1.188\times10^{-5}}{1.514\times10^{-2}(j\omega)^2+10(j\omega)+1}$$

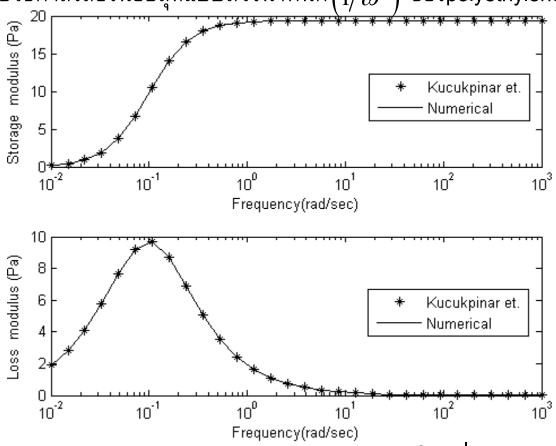
ส่วนวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega^2$ และ $1/\sigma^2$ คือ $\|\varepsilon\|_2=1.257\times10^{-2}$ และ $\|\varepsilon\|_2=1.88\times10^{-2}$



รูปที่11.แสดงค่า $G'(\omega_i)$ และ $G''(\omega_i)$ กับฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$ ของpolyethylene



รูปที่12.แสดงค่า $G'(\omega_i)$ และ $G''(\omega_i)$ กับฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$ ของpolyethylene



รูปที่13.แสดงค่า $G'(\omega_i)$ และ $G''(\omega_i)$ กับฟังก์ชันถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\sigma^2)$ ของpolyethylene

5. สรุป

ผลการทดสอบโปรแกรมทั้งสองกรณีที่แสดงในข้างต้น พบว่า การสังเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นโดยวิธีระบุเอกลักษณ์ของระบบ สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้ โดยการประยุกต์ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$, $1/\omega^2$ และ $1/\sigma^2$ มีความถูกต้องและประสิทธิภาพดีวิธีหนึ่ง สำหรับชุดข้อมูลมีความแปรปรวน และและจำนวนข้อมูลที่แตกต่างกัน ดังแสดงในรูปที่1-5
2. ฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่สังเคราะห์ได้ โดยการประยุกต์ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า σ^2 นั้นมีค่าความผิดพลาดมาก ไม่เหมาะสมในการถ่วงน้ำหนัก
3. การประยุกต์โปรแกรมสังเคราะห์ฟังก์ชันถ่ายโอนกับชุดข้อมูลที่ได้จากการทดลองจากวัสดุ polybutadient polymer และ Metallocene-catalyzed linear low density polyethylene resin ชนิด350D60 สามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ ดังแสดงในรูปที่ 6 ถึง13

การปรับปรุงและพัฒนาวิธีการสังเคราะห์ฟังก์ชั่นถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นนี้ โดยการประยุกต์ใช้เทคนิควิธีทางปัญญาประดิษฐ์ (Artificial intelligent), วิธีระบบปรับแต่งค่าได้ (Adaptive system) จะทำให้ได้แบบจำลองที่มีประสิทธิภาพที่ดีขึ้น

การศึกษาและวิจัยในขั้นตอนต่อไป คือการนำฟังก์ชั่นถ่ายโอนที่ได้เพื่อประยุกต์ใช้ในการพัฒนาออกแบบเครื่องมือวัดค่า $G'(\omega_i)$ และ $G''(\omega_i)$ และเป็นแนวทางในการวิเคราะห์คุณสมบัติและพฤติกรรมการตอบสนองทางกลศาสตร์ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น อาทิเช่น อาหาร วัสดุโพลิเมอร์ กระบวนการแข็งตัวของเลือด เป็นต้น

6.กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี (รหัสโครงการ SUT7-707-48-12-70) ที่ให้ทุนในงานวิจัยนี้ และขอบคุณ ศ.นท.ดร.สราวุฒิ สุจิตจร และผศ.ดร.เอกชัย จันทสาโร ที่ได้ให้คำแนะนำ และข้อเสนอแนะในการงานวิจัย

เอกสารอ้างอิง

[1] Levy, E.C.,1959. Complex-curve fitting, IRE Trans. Automatic Control, Vol. 4, pp. 37-43.

[2] Katkov, M.S., Kunezov, V.A., 1978. Determine transfer function using frequency response data, Journal of Adaptive systems, Automatic regulation and Control LIAI, pp.11-17. (in russian)

[3] Whitfield, A.H., 1986.Transfer function synthesis using frequency response data, Int. Journal of Control, Vol. 43, pp.1413-1426.

[4] Yeon-Wook Choe.,1999. Frequency domain identification for a simple plant, SICE, pp. 1015-1020.

[5] Kim, J.S., Song , C.K., Jeon, B.S., Ryu, J.W., Jang, Y.S., Kim, S., and Lee, S.H., 2001. A frequency domain identification method using total least squares, IEEE International Symposium on Industrial Electronics, Vol. 3, pp. 1855 – 1859.

[6] Luc Peirlinckxl, Rik Pintelon and Leo Van Biesen, 1992. Identification of the constitutive equations for linear viscoelastic composite materials, Instrumentation and Measurement Technology Conference 9th IEEE, pp. 709-715.

[7] Yanovsky G. Yu., Basistov G. Yu. and Siginer A. Dennis., 1996. Linear inverse problems in viscoelastic continua and a minimax method for fredholm equation of the first kind, Int. J. Engng Sci., Vol.34, pp. 1221-1245.

[8] Ping Yu, Yehia M. Haddad.,1994. A dynamic system identification method for the characterization of the rheological response of a class of viscoelastic material, Int. J. Pores Ves. & piping, Vol. 61, pp.87-97

[9] Kwang Soo Cho, Kim Silk Woo, Lee Dong-ho, Park Soon Lee, Min Euu Kyung, Seo Ho Kwan, Kang Inn-kyu Inn, Park Soo-Young, Kwow Youngkon, 2002. A Phenomenological Model for Linear Viscoelasticity of Monodisperse Linear Polymer, Macromolecular Research, Vol.10,pp.266-272

[10] Esra Kucukpinar, Dilhan M. Kalyon, Paul. P. Tong., 1999. Viscoelasticity of polyethylene produced with single site metallocene catalysis, SPE ANTEC Technical Papers, Vol.45,pp.1195-1200