

## การจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดใน 1 มิติ โดยวิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ

### A Simulation of the Solidification of Tubular Ice in 1-D

#### By Computational Fluid Dynamics

ณัฐดนัย พรรณเจริญวงษ์<sup>1\*</sup>, รพีพัฒน์ ลาดศรีทา<sup>2</sup>, เอกวุฒิ แสนคำวงษ์<sup>3</sup> กัมปนาท ไชยเพชร<sup>1</sup>  
นัตรชัย เบญจปิยะพร<sup>1</sup> และ จุฬารัตน์ เบญจปิยะพร<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น 40002

<sup>2</sup> ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องจักรกลเกษตร คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน วิทยาเขตขอนแก่น 40000

<sup>3</sup> ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน วิทยาเขตขอนแก่น 40000

\*ติดต่อ: nattadon.pa@gmail.com

#### บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอการจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดใน 1 มิติ โดยวิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ เพื่อศึกษาการจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด โดยจะพิจารณาเวลาในการแข็งตัว 10 , 20 และ 31 นาที อุณหภูมิของสารทำความเย็นมีค่าคงที่เท่ากับ  $-7.5\text{ }^{\circ}\text{C}$  และอุณหภูมิน้ำขาเข้ามีค่าเท่ากับ  $35\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$  ซึ่งผลการคำนวณพบว่าค่าความหนาที่ได้จากวิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (CFD) กับผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) มีความสอดคล้องกันในเชิงคุณภาพโดยที่ค่าความหนาของน้ำแข็งหลอดที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงนี้มีค่ามากกว่าค่าที่ได้จากวิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยตั้งแต่เวลาตั้งต้นจนถึงเวลาสิ้นสุดอยู่ที่ประมาณ 2.3% ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนนั้นมีค่าค่อนข้างสูงในช่วงเริ่มต้นของการแข็งตัว เนื่องจากมีการแกว่งของคำตอบ (Oscillated solution) ในระดับต่ำๆ อยู่รอบๆ ค่าที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรง และลักษณะของการแกว่งดังกล่าวจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไป ส่งผลให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลง

**คำหลัก:** พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ, การแข็งตัว, การเปลี่ยนแปลงเฟส, ผลเฉลยแม่นยำตรง, น้ำแข็งหลอด

#### Abstract

This article aims to present a simulation of solidification of tubular ice in 1-D by means of Computational Fluid Dynamics so study the simulation of solidification of tubular ice. It is time to solidification for 10, 20 and 31 minutes, the temperature of the refrigerant is a constant equal to  $-7.5^{\circ}\text{C}$  and inlet water temperature is equal to  $35^{\circ}\text{C}$ ,  $30^{\circ}\text{C}$  and  $25^{\circ}\text{C}$ , which calculated results showed that the thickness obtained from the computational fluid dynamics calculations (CFD) with the exact solution are consistent, qualitatively, with the thickness of the ice from the solution validity is greater than that value obtained from computational fluid dynamics. With an average error from the beginning till the end process is about 2.3%, which shows that the application to the aberration was high at the start of solidification. Since there are a slew of answers (Oscillated solution) low level around the value obtained from the exact solution. And the nature of the swing will be reduced over time, tolerances resulting in a decline.

**Keywords:** Computational Fluid Dynamics, Solidification, Phase change, Exact Solution, Tubular-Ice

## CST-44

### 1. บทนำ

ปัญหาแบบดั้งเดิมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสเตฟานนั้น เป็นปัญหาอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงสถานะ หรือ การเปลี่ยนแปลงการย้ายขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับการถ่ายเทความร้อนและการถ่ายเทมวลถ่ายโอนวัสดุ ในช่วงของการเปลี่ยนสถานะระหว่างกระบวนการทางความร้อนที่เกิดขึ้น ยกตัวอย่างกระบวนการดังกล่าว อาทิเช่น การแข็งตัวของโลหะบริสุทธิ์ การหลอมละลายหรือการละลายของน้ำแข็ง การแข็งตัวของน้ำ การทำให้อาหารมีความแข็งตัว และกระบวนการอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการแข็งตัวและการหลอมละลาย เป็นต้น โดยจะสมมติว่าอยู่ภายใต้เงื่อนไขของการเปลี่ยนสถานะอย่างต่อเนื่อง ซึ่งในขณะที่มีการเปลี่ยนสถานะของเหลว - ของแข็งนั้นจะมีอุณหภูมิเท่ากัน การเปลี่ยนสถานะนั้นจะสามารถดูแนวทางได้จากวิธีการของ Carslaw and Jaeger ในปี 1959 เนื่องจากรูปแบบสมการไม่เชิงเส้นของสมการสมดุลพลังงานที่ไม่ทราบเวลาในการเปลี่ยนสถานะที่ไม่มีการเปลี่ยนอุณหภูมิที่อินเตอร์เฟซ จะเกี่ยวข้องกับการดูดซึมหรือการปล่อยความร้อนแฝงและการเปลี่ยนคุณสมบัติอย่างฉับพลัน การวิเคราะห์ถึงวิธีการแก้ปัญหาเป็นการยากที่จะได้รับตัวเลขที่มีขอบเขตในหัวข้อที่เป็นกรณีพิเศษ ดังนั้นวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยการประมาณค่าจึงถูกนำมาใช้การวิเคราะห์ปัญหาการเปลี่ยนสถานะ ซึ่งวิธีการของ The Picard's iterative method (Witula et al., 2011), The Lie-Group shooting method (Chein-Shan Liu, 2011), The heat balance integral method (HBIM), (Myers, 2007) จึงถูกนำมาใช้ด้วย, The asymptotic solution สำหรับปัญหาประเภท zero-phase (Naaktgeboren, 2007) , ในทางกลับกัน numerical methods เป็นการใช้โดยทั่วไป, วิธีการที่ชัดเจนอย่าง Finite Difference Method จึงถูกนำมาใช้ (Savovic and Caldwell, 2003), The Faedo-Galerkin Finite Element Method พร้อมด้วย Crank-Nicolson time scheme จึงถูกนำมาใช้ (Rincon and Scardua, 2008), การ

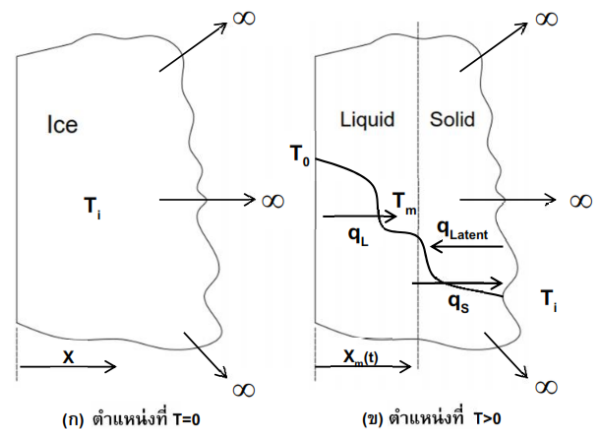
จำลองเชิงตัวเลขของน้ำแข็งในหนึ่งมิติและสองมิตินั้นนั้นจะถูกวิเคราะห์อยู่บนพื้นฐานของการเข้ามาของแหล่งความร้อนแฝงโดยจะใช้วิธี cell-centered Finite Volume Method (Prapainop and Maneeratana, 2004), ทฤษฎีการเปลี่ยนแปลง enthalpy ด้วย finite volume เป็นวิธีการที่จะวิเคราะห์เชิงตัวเลขของกระบวนการละลายด้วยการพาความร้อนวิธีทางธรรมชาติที่สภาวะคงที่ในสองมิติของน้ำแข็งถูกนำมาใช้ด้วย (Al-Zubaidy, 2006), เทคนิคการสร้างแบบจำลองที่มีคุณภาพมากมายถูกนำมาประมาณค่าวิธีการวิเคราะห์และวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งจะใช้; Enthalpy Method, Boundary Immobilization Method (BIM), Perturbation Method, Nodal Integral Method and the (HBIM) สำหรับอธิบายและเปรียบเทียบปัญหาในหนึ่งมิติของ Stefan problem (Caldwell and Kwan, 2004), นอกจากนี้จึงต้องใช้อุปกรณ์ต่างๆมาช่วยในการแก้ปัญหาการเปลี่ยนสถานะด้วย, การละลายของหิมะ/น้ำแข็งและผลที่เกิดจากการไถ่เกล็ดในหิมะ/น้ำแข็ง นั้นจะถูกสร้างแบบจำลองโดยใช้ MATLAB (Patrick et al., 2008), การละลายของน้ำแข็งในสามมิติรอบๆท่อที่บรรจุของเหลวอยู่ภายใน จะวิเคราะห์ด้วยวิธีการเชิงตัวเลขโดยใช้ PHOENICS Code (Sugawara et al., 2011), โดยทั่วไปแล้ว Stefan problem จะมีแนวทางอยู่ 2 เรื่องหลักๆ คือ (1.) front-tracking เมื่อขอบเขตของการเปลี่ยนสถานะเป็นการเปลี่ยนอย่างต่อเนื่องอย่างตรวจสอบได้ในทุกๆ คาบของการเปลี่ยนสถานะ Sadoun et al. (2012), มีการใช้ the Goodman (HBIM) เป็นการเคลื่อนไหวที่ชัดเจนของผิวของแข็ง - ของเหลว ด้วย finite difference method ประกอบกับตำแหน่งที่มันไม่สามารถเคลื่อนที่ได้บนพื้นฐานของ front-tracking และเรียกมันว่า variable space grid method (VSGM), เพราะฉะนั้นวิธีการนี้จึงไม่ต้องการการประมาณค่าที่ไม่ต่อเนื่องสำหรับหัวข้อที่มีอุณหภูมิไม่เปลี่ยนแปลงซึ่งยากที่จะแก้ปัญหาด้วยการใช้งาน อัลกอริทึมที่มีค่าใช้จ่ายด้านเครื่องมือราคาสูง Zhaochun et al. (2011) ได้นำเสนอวิธีการเคลื่อนที่

## CST-44

ของพื้นผิวซึ่งได้ตำแหน่งที่มีความแม่นยำและความน่าเชื่อถือโดยวิธี Grid point ทำให้สามารถแก้ปัญหาที่ลงได้ แนวทางการแก้ปัญหาโดยใช้วิธี fixed-grid method ด้วยวิธีนี้ทำให้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนตัวของผิวที่มีความชัดเจนและวิธีนี้ยังมีแนวทางการใช้ที่หลากหลายสำหรับปัญหาที่มีหลายมิติ (2.) the temperature-based หรือ the enthalpy-based method , The temperature-based เป็นแนวทางการวิเคราะห์อุณหภูมิสำหรับตัวแปรตามในสมการกำกับการไหล (governing equation) เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงปัญหาความไม่ต่อเนื่องของอุณหภูมิ จะต้องใช้การประมาณค่าตัวเลขที่มีความเสถียรและการ integration ขึ้นสูงในการคำนวณความร้อนแฝง ในทางกลับกัน The enthalpy-based method แบ่งได้เป็นพื้นฐาน enthalpy , ปริมาณความจุความร้อนและแหล่งความร้อนแฝง ในหัวข้อเรื่องพื้นฐาน enthalpy นั้น enthalpy จะใช้เป็นตัวแปรหลักและอุณหภูมิจะใช้คำนวณเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง enthalpy และอุณหภูมิ วิธีการนี้จะให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องเหมาะสมสำหรับช่วงที่ไม่เกิดการแข็งตัว แต่มันเป็นเรื่องที่ซับซ้อนและมีราคาแพงสำหรับการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ ในวิธีการที่เห็นความจุความร้อนได้ชัด ความร้อนแฝงจะถูกคำนวณจากการ integration ความจุความร้อนด้วยอุณหภูมิที่เชื่อถือได้ ความสัมพันธ์ระหว่างความจุความร้อนและอุณหภูมิในกระบวนการเปลี่ยนแปลงที่อุณหภูมิคงที่ ช่วงความกว้างของระยะการเปลี่ยนสถานะจะต้องประมาณค่าในช่วงที่ใกล้เคียงกับอุณหภูมิของการเปลี่ยนสถานะ ดังนั้น ขนาดของช่วงเวลาจะต้องเล็กพอสำหรับการคำนวณช่วงอุณหภูมิที่ต้องการ ในวิธีแหล่งความร้อนแฝง ความร้อนแฝงจะอยู่ในรูปแบบของสมการที่แตกต่างกัน โดยขึ้นอยู่กับวิธีการอธิบายความสัมพันธ์ของ enthalpy และอุณหภูมิของความร้อนแฝง ดังนั้นงานวิจัยนี้จะทำการจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดใน 1 มิติ โดยวิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ ด้วยการ ใช้ Finite Volume Method บนพื้นฐานของ fixed grid และความจุความร้อนแฝง

ช่วงเวลาที่เหมาะสมนั้นถูกเลือกนำมาใช้โดยการวิเคราะห์อย่างถี่ถ้วนแล้ว ค่าการนำความร้อนของน้ำแข็งถูกประมาณค่าในตำแหน่งอินเตอร์เฟซที่แนบชิดติดกันระหว่างของแข็ง-ของเหลวที่ควบคุมปริมาตร ในการตรวจสอบผลที่ประมาณค่าไว้จะต้องเปรียบเทียบกับคำตอบที่ได้จากผลเฉลยแน่นอนตรง (exact analytical solution)

## 2. แบบจำลองและการวิเคราะห์



รูปที่ 1 การจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็ง

พิจารณาวัตถุกึ่งอนันต์โดยมีเงื่อนไข ( $0 \leq x \leq \infty$ ) ที่อุณหภูมิกระจายตัวสม่ำเสมอเริ่มต้น คือ  $T_i$  , เมื่อวัตถุอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ตำแหน่ง  $x = 0$  โดยมีค่าอุณหภูมิคงที่ คือ  $T_0$  และ ( $T_0 > T_m > T_i$ ) แสดงดังรูปที่ 1 ซึ่งสิ่งที่จำเป็นต้องทราบ: การกระจายตัวของอุณหภูมิที่เป็นสถานะของแข็ง (น้ำแข็ง),  $T_s$  และสถานะของเหลว (น้ำ),  $T_L$  , เศษส่วนการละลาย คือ  $M_f$  , ตำแหน่งอินเตอร์เฟซ,  $x_m(t)$  , และความเร็วอินเตอร์เฟซ  $V_{interface}$  .(Mishaal Abdulameer Abdulkareem ค.ศ. 2013)

กำหนดขอบเขตและสมมุติฐาน ดังนี้

1. คุณสมบัติทางความร้อนของของแข็งนั้นมีค่าไม่เท่ากับของเหลว ที่เป็นวัตถุชนิดเดียวกัน
2. ไม่คิดการขยายตัวของปริมาตรของทั้งสองสถานะ โดยกำหนดให้ปริมาตรและความหนาแน่นของวัตถุมีค่าคงที่
3. คุณสมบัติทางความร้อนของสถานะใดสถานะหนึ่ง ไม่เปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ

**CST-44**

4. อุณหภูมิเริ่มแรกมีค่าคงที่ คือ  $T_i$
5. อินเตอร์เฟซเป็นการเปลี่ยนสถานะ จะมีอุณหภูมิการเปลี่ยนสถานะคงที่ ( $T_m$ )
6. ค่าความร้อนแฝงของการหลอมละลาย ( $h_{SL}$ ) มีค่าคงที่
7. ไม่คิดผลกระทบที่เกิดจากความตึงผิวและความโค้งที่ผิวของวัตถุ
8. ไม่มีการพาความร้อนและการแผ่รังสีความร้อน โดยพิจารณาการนำความร้อนเพียงอย่างเดียว และไม่คิดผลกระทบที่เกิดจากแรงโน้มถ่วงของโลก
9. ไม่มีการเกิดความร้อนจากภายในของวัตถุ

**3. ผลเฉลยรูปแบบปิดในหนึ่งมิติ**

สมการหลัก (Governing equation) มีเงื่อนไขเริ่มต้นและขอบเขต คือ :

$$\frac{\partial T_L}{\partial t} = \alpha_L \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} \quad \text{for } (0 \leq x \leq x_m(t)) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \quad \text{for } (x_m(t) \leq x \leq \infty) \quad (2)$$

$$T(x,0) = T_i \quad (3)$$

$$T(0,t) = T_0 \quad (4)$$

$$T(\infty,t) = T_i \quad (5)$$

$$T(x_m(t),t) = T_m \quad (6)$$

ผลการสมดุลพลังงานที่ตำแหน่งอินเตอร์เฟซ ;

$$\left( k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \right)_{x_m(t)} - \left( k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} \right)_{x_m(t)} = \rho h_{SL} \frac{dx_m(t)}{dt} \quad (7)$$

กำหนดให้ :  $\delta = \frac{x_m(t)}{2\sqrt{\alpha_L t}}$

และ :  $\alpha = \frac{\alpha_s}{\alpha_L} = \frac{k_s \rho C_L}{k_L \rho C_s}$

สมการทั่วไปของการกระจายอุณหภูมิของสถานะของเหลวและของแข็งนั้นถูกกล่าวไว้ตามตัวอย่างของ Carslaw และ Jaeger ในปี ค.ศ.1959 :

$$\frac{T_L(x_L,t) - T_m}{T_0 - T_m} = \left[ 1 - \frac{\text{erfc}\left(\frac{x_L}{2\sqrt{\alpha_L t}}\right)}{\text{erfc}(\delta)} \right] \quad (8)$$

$$\frac{T_s(x_L,t) - T_i}{T_m - T_i} = \left[ \frac{\text{erfc}\left(\frac{x_s}{2\sqrt{\alpha s t}}\right)}{\text{erfc}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right)} \right] \quad (9)$$

เมื่อ  $(\delta)$  เป็นรากของสมการ transcendental equation ดังต่อไปนี้ :-

$$\frac{1}{\text{erfc}(\delta)e^{\delta^2}} - \frac{\beta\theta}{\text{erfc}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right)e^{\left(\frac{\delta^2}{\alpha}\right)}} = \frac{\delta\sqrt{\pi}}{St} \quad (10)$$

(Stefan Number)  $St = \frac{\text{Sensible heat}}{\text{Latent heat}} = \frac{C_L(T_0 - T_m)}{h_{SL}}$

$\beta = \sqrt{\frac{k_s \rho C_s}{k_L \rho C_L}}$  และ  $\theta = \frac{T_m - T_m}{T_0 - T_m}$

และความเร็วของอินเตอร์เฟซ ( $V_{\text{interface}}$ ) เป็นดังต่อไปนี้ ;

$$V_{\text{interface}} = \frac{dx_m(t)}{dt} = \delta \sqrt{\frac{\alpha_L}{t}} \quad (11)$$

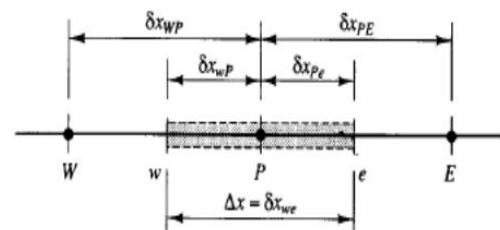
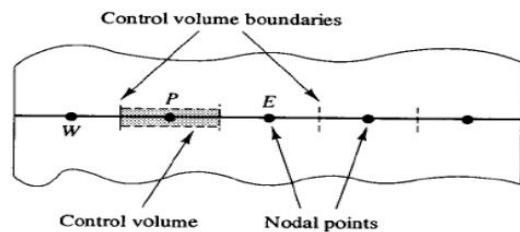
และเศษส่วนการละลาย ( $M_r$ ) เป็นดังต่อไปนี้;

$$M_r = \frac{x_m(t)}{L} = \frac{2\delta\sqrt{\alpha_L t}}{L} \quad (12)$$

เมื่อ  $L$  คือ ความยาวที่จำกัดในการตรวจสอบผลการคำนวณของแบบจำลองหนึ่งมิติ

**4. แบบจำลองปริมาตรจำกัด**

**4.1. รูปแบบกริด**



รูปที่ 2 การควบคุมขอบเขต

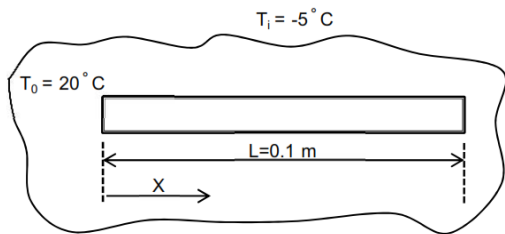
(Mishaal Abdulameer Abdulkareem, 2013)

ด้วยวิธี Finite Volume Method, ขั้นตอนแรกเป็นการแบ่งขอบเขตของตัวเลขให้มีความต่อเนื่องโดย ;  $(N_x)$  สำหรับขอบเขตในหนึ่งมิติ โดยทั่วไปจะสามารถหาจุดสำคัญ P. ในขอบเขตหนึ่งมิติ, Node

## CST-44

ในด้านตะวันออกและตะวันตกของ P เป็นการระบุด้วย W และ E ตามลำดับ, ขอบเขตด้านทิศตะวันตกจะถูกเรียกว่า 'w' และด้านทิศตะวันออกที่ถูกควบคุมปริมาตรจะถูกเรียกว่า 'e', ดังแสดงในรูปที่ 2 การแบ่งตัวเลขตามขอบเขตของเวลา  $\Delta t$ , ตัวแปรที่แสดงลำดับเวลาก่อนหน้าจะถูกเขียนต่อด้วย (o, Old), ในทางกลับกัน ตัวแปรในช่วงเวลาที่ใหม่กว่าจะไม่มี การเขียนกำกับ, ซึ่ง Versteeg และ Malalasekera ได้กล่าวไว้ในปี ค.ศ.1995

### 4.2. แบบจำลอง Discretization ในหนึ่งมิติ



รูปที่ 3 แบบจำลอง Discretization ในหนึ่งมิติ

ที่ตำแหน่ง 0.1-ม. มีอุณหภูมิเริ่มต้น คือ  $T_i = -5\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ด้วยเงื่อนไขของตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายมีอุณหภูมิคงที่ คือ  $T_0 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  ในขณะที่ปลายอีกข้างหนึ่งให้มีอุณหภูมิเท่ากับจุดเริ่มต้น คือ  $T_i = -5\text{ }^{\circ}\text{C}$  ดังแสดงในรูปที่ 3, การควบคุมขนาดและปริมาตรอย่างต่อเนื่องโดยใช้  $\Delta x$ , ดังนั้นสมการกำกับพลังงานในหนึ่งมิติ คือ :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (13)$$

#### 4.2.1. สมการกำกับหนึ่งสถานะ ( $T < T_m$ )

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{T_i}^T \rho C_s dT \right] \quad (14)$$

นำสมการที่ (14) มาแทนในสมการที่ (13) จะได้ว่า;

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{T_i}^T \rho C_s dT \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (15)$$

คูณสมการที่ (15) ด้วย  $(dV \cdot dt)$ ,  $(dV = dx \cdot (1) \cdot (1))$  แล้วทำการ integrate ตามขอบเขตที่ได้ควบคุมปริมาตร, จะได้ว่า;

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \rho C_s \frac{\partial T}{\partial t} dx \cdot dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \cdot dt \quad (16)$$

โดยจะได้สมการที่มีรูปแบบสมบูรณ คือ;

$$\rho C_s (T_p - T_p^0) \Delta x =$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dt \quad (17)$$

#### 4.2.2. สมการกำกับสองสถานะ ( $T \geq T_m$ ):

ด้วยวิธีการ enthalpy method นั้น สามารถทำนายวิธีการที่เกิดจากปัญหาที่มี 2 สถานะได้ ดังวิธีต่อไปนี้ :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{T_i}^{T_m} \rho C_s dT \right] - \frac{\partial}{\partial t} (\rho h_{SL}) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{T_m}^T \rho C_L dT \right] \quad (18)$$

แทนสมการ (18) ลงในสมการที่ (13), จะได้ว่า;

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{T_i}^{T_m} \rho C_s dT \right] - \frac{\partial}{\partial t} (\rho h_{SL}) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{T_m}^T \rho C_s dT \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (19)$$

คูณสมการที่ (19) ด้วย  $(dV \cdot dt)$ ,  $(dV = dx \cdot (1) \cdot (1))$  แล้วทำการ integrate ตามขอบเขตที่ได้ควบคุมปริมาตร, จะได้ว่า;

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \rho C_s \frac{\partial T}{\partial t} dx \cdot dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} (\rho h_{SL}) dx \cdot dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \rho C_L \frac{\partial T}{\partial t} dx \cdot dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \cdot dt \quad (20)$$

ได้รูปแบบที่สมบูรณ์;

$$\rho C_s (T_p - T_p^0) \Delta x - \rho h_{SL} \Delta x + \rho C_L (T_p - T_p^0) \Delta x =$$

### CST-44

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dt \quad (21)$$

แต่ละขอบเขตเงื่อนไขนั้นถูกแทนที่ในสมการที่ (17) สำหรับ discretizing แบบจำลองหนึ่งสถานะในหนึ่งมิติ และแทนที่ในสมการที่ (21) สำหรับแบบจำลองสองสถานะในหนึ่งมิติ แล้วแบ่งผลการทดลองที่เกิดขึ้นโดยใช้ความต่างของเวลา  $\Delta t$  เพื่อจัดรูปแบบของคำตอบที่ได้

## 5. แบบจำลองและการวิเคราะห์

### 5.1 สมการการถ่ายเทความร้อน

การสร้างสมการทางคณิตศาสตร์จะพิจารณาจากสมการควบคุมและสมการเฉพาะซึ่งจะได้สมการทางคณิตศาสตร์สำหรับการวิเคราะห์การขึ้นรูปของน้ำแข็งหลอดในแนวพิกัด  $(x,t)$  ในรูปอัตราการเปลี่ยนแปลงของเอนทาลปี สมการการถ่ายเทความร้อนสำหรับการวิเคราะห์แบบ 1 มิติ แสดงดังสมการที่ 22

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (22)$$

ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $k$  จะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ โดยการแก้ปัญหาการเปลี่ยนสถานะของน้ำเอนทาลปี ( $H$ ) จะถูกกำหนดโดยผลรวมของ Sensible Enthalpy ( $h$ ) กับ ค่าความร้อนแฝง  $\Delta H$  ซึ่งจะได้สมการดังนี้

$$H = h_{ref} + \int_{T_{ref}}^T c_p dT + \Delta H \quad (23)$$

โดยที่  $h_{ref}$  = เอนทาลปีอ้างอิง  $T_{ref}$  = อุณหภูมิอ้างอิง และ  $C_p$  = ความจุความร้อนที่ความดันคงที่ซึ่งค่าความร้อนแฝงสามารถคำนวณได้จาก

$$\Delta H = \beta L \quad (24)$$

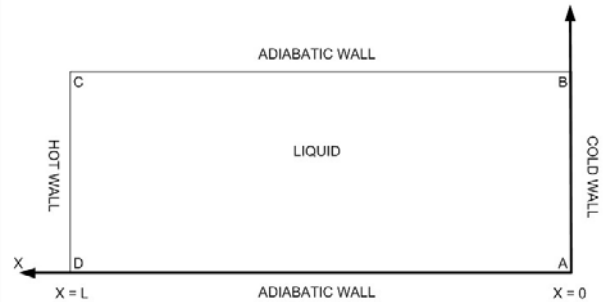
โดยอัตราส่วนของเหลว (Liquid fraction),  $\beta$  คือ

$$\beta = \frac{T - T_{solidus}}{T_{liquid} - T_{solidus}} \quad (25)$$

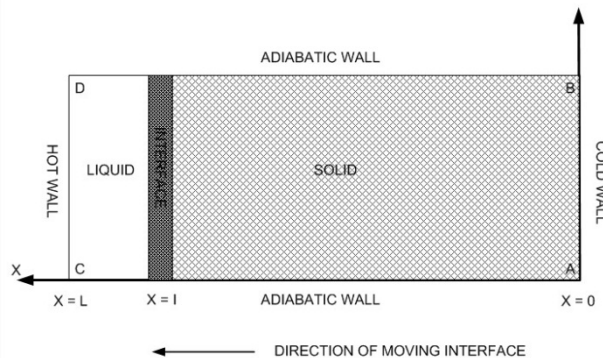
โดยถ้า  $\beta = 0 ; T < T_{solidus}$

และถ้า  $\beta = 1 ; T > T_{solidus}$

## 5.2 การจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด



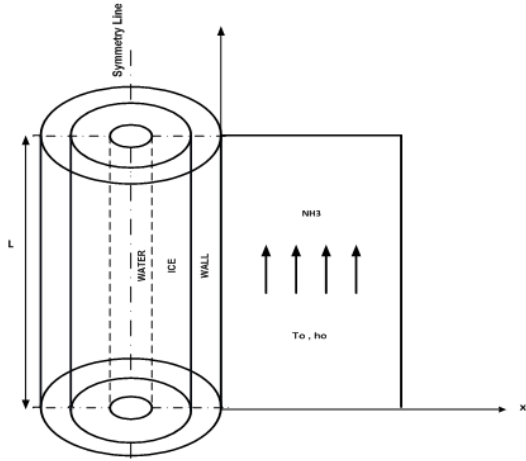
รูปที่ 4 ที่ตำแหน่ง  $t = 0$



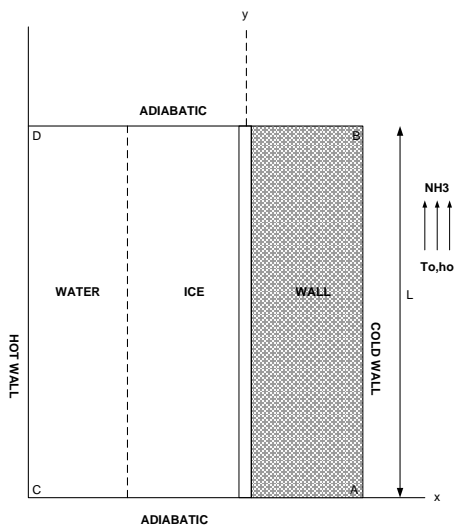
รูปที่ 5 ที่ตำแหน่ง  $t > 0$

ปัญหาการแข็งตัวเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่ปลายด้านหนึ่งของสารบริสุทธิ์ที่มีลักษณะล้อมรอบแบบปิด(enclosure) ดังรูปที่ 4 และ 5 ซึ่งได้มีการศึกษาการแข็งตัวแบบ 1 มิติ โดยที่ตำแหน่ง  $x = 0$  (cold wall) และ  $x = L$  (hot wall) มีอุณหภูมิคงที่ซึ่งขณะที่ผนังอีก 2 ด้านไม่มีการรับหรือเสียความร้อนให้กับสิ่งแวดล้อม (adiabatic wall) ในสถานะเริ่มต้นที่ตำแหน่ง  $t = 0$  ดังรูปที่ 4 บริเวณพื้นผิว ABCD จะมีของเหลว (liquid) ซึ่งมีอุณหภูมิต่ำกว่า ( $T_i > T_m$ ) และในสถานะที่ตำแหน่ง  $t > 0$  ดังรูปที่ 5 อุณหภูมิจะลดลงต่ำกว่าอุณหภูมิหลอมเหลวที่ผนังด้านขวาและหลังจากนั้นก็เกิดการแข็งตัวขึ้นและความหนาของสารบริสุทธิ์ก็จะเพิ่มขึ้นตามเวลาที่เปลี่ยนแปลงไปขึ้นและความหนาของสารบริสุทธิ์ก็จะเพิ่มขึ้นตามเวลาที่เปลี่ยนแปลงไป

### CST-44



รูปที่ 6 แผนภาพระบบที่พิจารณา



รูปที่ 7 ภาพตัดตามยาวระบบที่พิจารณา

ปัญหาที่พิจารณาในบทความนี้เป็นปัญหาการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดใน 1 มิติ ซึ่งในกระบวนการแข็งตัวนั้นน้ำแข็งจะเริ่มก่อตัวจากขอบผนังด้านในของท่อจนกระทั่งมีขนาดที่เหมาะสมและมีแอมโมเนียเป็นสารทำความเย็นอยู่โดยรอบนอกท่อ ดังรูปที่ 6 และ 7 ซึ่งในการแก้ปัญหาครั้งนี้จะพิจารณาเฉพาะการแข็งตัวของน้ำไปเป็นน้ำแข็งเท่านั้น ซึ่งจะมีสมมุติฐานพื้นฐานหลักๆดังต่อไปนี้

1. พิจารณาปัญหาเป็นการเปลี่ยนสถานะใน 1 มิติในแนวแกนแบบเปลี่ยนแปลงตามเวลาของน้ำแข็งหลอด

2. อุณหภูมิตามเส้นรอบวงใด ๆ จะมีค่าไม่เปลี่ยนแปลง หรืออาจกล่าวได้ว่า อุณหภูมิไม่เปลี่ยนแปลงไปที่รัศมีเดียวกัน

3. พิจารณาในกรณีที่ไม่มีแหล่งพลังงานความร้อนในผนัง

4. พิจารณาปัญหาการแข็งตัวเป็นแบบแยกสถานะกันชัดเจนระหว่างสถานะของแข็งและของเหลว (sharp interface) และ อุณหภูมิ ณ รอยแบ่งระหว่างทั้งสองสถานะมีค่าคงที่เท่ากับอุณหภูมิเยือกแข็ง

5. พิจารณาปัญหาเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบการนำความร้อน (heat conduction) ในบริเวณของผนังท่อ และน้ำแข็ง

สำหรับค่าของคุณสมบัติต่าง ๆ ของน้ำและน้ำแข็งที่ใช้ในการพิจารณาเป็นดังตารางที่ 1

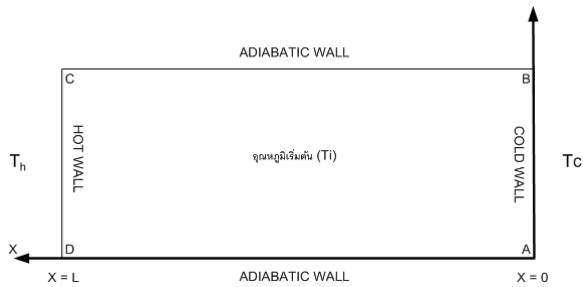
ตารางที่ 1 คุณสมบัติของน้ำและน้ำแข็ง

คุณสมบัติ	ค่าที่ใช้
$\rho_{\text{น้ำแข็ง}}$ (kg/m <sup>3</sup> )	920
$K_{\text{น้ำแข็ง}}$ (W/m-K)	1.88
$C_{\text{น้ำแข็ง}}$ (J/kg-K)	2,040
$\rho_{\text{น้ำ}}$ (kg/m <sup>3</sup> )	1,000
$K_{\text{น้ำ}}$ (W/m-K)	0.569
$C_{\text{น้ำ}}$ (J/kg-K)	4,217
L (kJ/kg)	333.7

บทความนี้เป็นการทำงานการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดในหนึ่งมิติโดยวิธีการทางพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณซึ่งสามารถจำลองได้ด้วยวิธีการทางพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ ซึ่งรูปทรงของน้ำแข็งหลอดนี้จะถูกสร้างด้วยโปรแกรมการวาดรูปและนำมาสร้างแบบจำลองตาข่ายข้อมูล (meshing) แล้วนำข้อมูลเข้าสู่โปรแกรมเพื่อใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหา ซึ่งจากการวิจัยพบว่าการตั้งค่าตัวแปรและค่าพารามิเตอร์ในการคำนวณที่เหมาะสมจะสามารถทำให้ผลการวิเคราะห์ (simulation) ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) ผลเฉลยที่ได้จากการนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและผลการทดลองจริง ดังแสดงไว้ในตารางที่ 1 และ 2 ซึ่งจะถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์ห้ในบทความนี้

## CST-44

จากความสัมพันธ์ทั้งหมดที่กล่าวมา สามารถจำลองแผนภาพที่ใช้ในการนำมาวิเคราะห์ได้ดังรูปที่ 8 ซึ่งสำหรับค่าของอุณหภูมิเริ่มต้นของน้ำ ( $T_i$ ) และอุณหภูมิเงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่ง  $x = 0$  (cold wall) และที่ตำแหน่ง  $x = L$  (hot wall) แสดงในตารางที่ 2 ส่วนขอบเขตของผนัง BC และ AD เป็นอะเดียแบติก



รูปที่ 8 แผนภาพจำลองความสัมพันธ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์

### 5.3 เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต

ตารางที่ 2 Formulation of Case Study

case	initial state	$T_{initial}$	$T_h$	$T_c$
1	น้ำ	35	35	-7.5
2	น้ำ	30	30	-7.5
3	น้ำ	25	25	-7.5

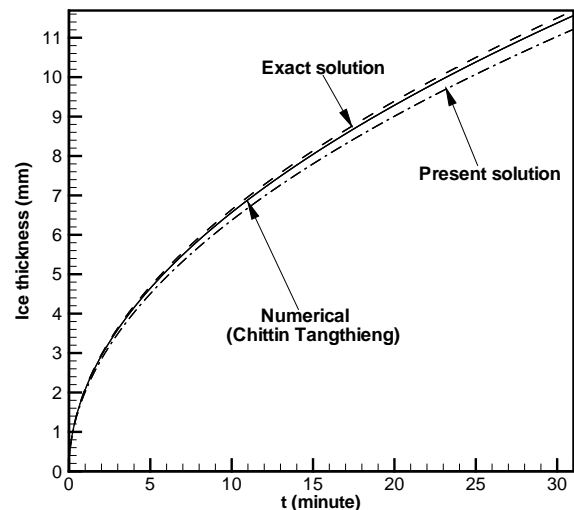
ก่อนที่จะเริ่มการจำลองด้วยระเบียบวิธีการทางพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณนั้น ต้องทำการกำหนดค่าเริ่มต้นก่อนโดยที่จะกำหนดให้เวลาที่ใช้ในการเริ่มคำนวณมีค่าเท่ากับ 0 วินาทีซึ่งเงื่อนไขเหล่านี้จะระบุไว้ในทุกกริดสำหรับทุกตัวแปรดังแสดงในตารางที่ 2 และการแก้ปัญหาจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นเหล่านี้ และแบบจำลองที่แสดง (42 x42) mm ดังแสดงในรูปที่ 8

## 6. ผลการทดลองและอภิปรายผล

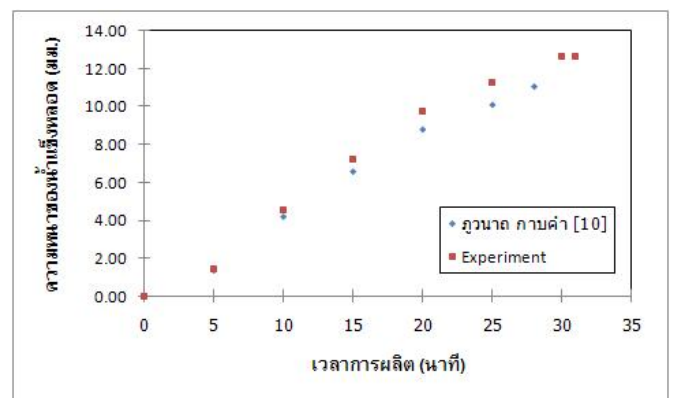
จุดมุ่งหมายของบทความฉบับนี้ คือ การทำนายการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดในหนึ่งมิติโดยวิธีการทางพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ เพื่อศึกษาการจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดในหนึ่งมิติโดยการใช้กริดคงตัว ซึ่งจะวิเคราะห์ผลการทดลองดังต่อไปนี้

### 6.1 การจำลองการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอด

ผลการเปรียบเทียบค่าความหนาของน้ำแข็งหลอดที่วิเคราะห์โดยโปรแกรมเพื่อใช้วิธีการทางพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณในการแก้ปัญหาผลเฉลยแม่นยำตรง ผลเฉลยที่ได้จากการนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ [จิตติน แดงเที่ยง] และผลการทดลองจริงที่เวลาต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 9 และ 10



รูปที่ 9 การเปลี่ยนแปลงความหนาของน้ำแข็งเทียบกับเวลา

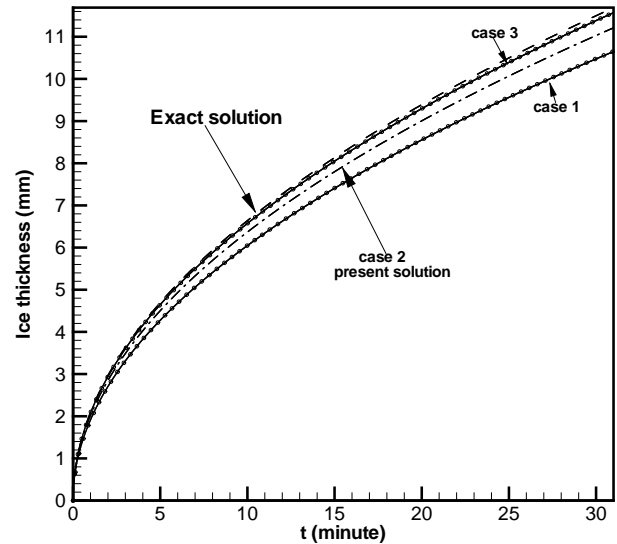


รูปที่ 10 การเปลี่ยนแปลงความหนาของน้ำแข็งเทียบกับเวลาเชิงการทดลอง (Experiment)



## CST-44

จากรูปที่ 9 และ 10 นี้เป็นการเปรียบเทียบค่าของความหนาของน้ำแข็งหลอดที่เวลาต่างๆ ซึ่งในรูปที่ 9 นี้เป็นการเปรียบเทียบกันระหว่างวิธีการทางพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณในการแก้ปัญหาผลเฉลยแม่นยำตรงและผลเฉลยที่ได้จากการนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ [จิตติน แดงเที่ยง] และจากรูปที่ 9 เป็นการเปรียบเทียบโดยการทดลองจริงระหว่าง [สรวิินทร์ ปุคะภาค] และ [ภูวนาท กาบคำ] ซึ่งในทางทฤษฎีแล้วค่าของความหนาของน้ำแข็งหลอดจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อเวลาผ่านไปและค่าความหนาของน้ำแข็งหลอดนี้จะแปรผันตรงกับรากที่สองของเวลา ซึ่งจากรูปที่ 9 และ 10 นี้จะเป็นการเปรียบเทียบค่าความหนาจากวิธีการทางพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณในการแก้ปัญหา ผลเฉลยแม่นยำตรง ผลเฉลยที่ได้จากการนำไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ [จิตติน แดงเที่ยง] และผลการทดลองจริงที่เวลาต่างๆ ซึ่งจะพบว่า 1) ค่าของความหนาของน้ำแข็งหลอดที่ได้จากงานวิจัยอื่น [จิตติน แดงเที่ยง] 2) ผลการทดลองจริงที่เวลาต่างๆ 3) จากวิธีการทางพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ และ 4) การคำนวณเชิงตัวเลข ซึ่งจะมีค่าต่ำกว่าค่าของความหนาที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรง โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยตั้งแต่เวลาตั้งต้นจนถึงเวลาสิ้นสุดอยู่ที่ประมาณ 2.3% ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนจะมีค่าค่อนข้างสูงในช่วงเริ่มต้นของการแข็งตัว เนื่องจากมีการแกว่งของคำตอบ (oscillated solution) ในระดับต่ำๆ อยู่รอบๆ ค่าที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรง(exact solution) และลักษณะของการแกว่งดังกล่าวจะมีค่าลดลงเมื่อเวลาผ่านไป ส่งผลให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลง



รูปที่ 11 การเปรียบเทียบความหนาของน้ำแข็งเทียบกับเวลาที่อุณหภูมิน้ำป้อน 25, 30 และ 35 องศาเซลเซียส

จากรูปที่ 11 เป็นการเปรียบเทียบความหนาของน้ำแข็งเทียบกับเวลาที่อุณหภูมิน้ำป้อน 25, 30 และ 35 องศาเซลเซียส ทั้งนี้จะกำหนดให้เวลาสุดท้ายของการคำนวณจะสิ้นสุดเมื่อน้ำแข็งหลอดมีความหนาเท่ากับ 12 มิลลิเมตร และอุณหภูมิอิ่มตัวของแอมโมเนีย ( $T_0$ ) จะถูกตั้งไว้ที่ -8 องศาเซลเซียส ซึ่งจากรูปจะพบว่า ถ้าอุณหภูมิน้ำป้อน คือ 35 องศาเซลเซียส (case1) อุณหภูมิจะค่อนข้างสูงเมื่อเทียบกับอุณหภูมิจริงนั้นก็คือ 30 องศาเซลเซียส (case2) ซึ่งความหนาของน้ำแข็งจะมีค่าน้อยเมื่อเวลาผ่านไปเนื่องจากอุณหภูมิน้ำป้อนค่อนข้างสูงส่วนอุณหภูมิ 25 องศาเซลเซียส (case3) อุณหภูมิจะค่อนข้างต่ำเมื่อเทียบกับอุณหภูมิจริงนั้นก็คือ 30 องศาเซลเซียส (case2) ซึ่งความหนาของน้ำแข็งจะมีค่ามากเมื่อเวลาผ่านไปเนื่องจากอุณหภูมิน้ำป้อนค่อนข้างต่ำกว่าอุณหภูมิที่ใช้จริง

## 7. สรุปผลการทดลอง

จากผลการทดลอง พบว่าทั้งสามกรณี (อุณหภูมิน้ำป้อน 25, 30 และ 35 องศาเซลเซียส) เมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงจะมีความสอดคล้องกันในเชิงคุณภาพ โดยที่ค่าความหนาของน้ำแข็งหลอดที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงนี้มีค่ามากกว่าค่าที่ได้จาก

## CST-44

วิธีการทางพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณในการแก้ปัญหา ดังนั้นหากเราสามารถที่จะทำนายการแข็งตัวของน้ำแข็งหลอดในแต่ละช่วงเวลาได้ ก็จะเป็นประโยชน์ในด้านการประหยัดพลังงานเป็นอย่างมาก

### 8. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณโรงงานขอนแก่นมิตรภาพที่ให้ทำการทดลองและเก็บข้อมูล สถานจัดการและอนุรักษ์พลังงาน คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น และ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่นที่ได้ทำการสนับสนุนงานวิจัยในครั้งนี้

### 9. เอกสารอ้างอิง

#### 9.1 บทความจากวารสาร (Journal)

- [1] Salcudean, M. and Abdullah, Z., 1988. On the Numerical Modeling of Heat Transfer During Solidification Processes. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 25, pp. 445-473.
- [2] Mishaal Abdulameer Abdulkareem, 2013. Numerical Simulation of Ice Melting Using the Finite Volume Method, Journal of Engineering, vol. 19, June 2013, pp.717-733.
- [3] Caldwell J. and Kwan Y.Y., 2004. "Numerical methods for one-dimensional Stefan problem", Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, pp. 535-545.
- [4] Chein-Shan Liu, 2011. "Solving two typical inverse Stefan problems by using the Lie-Group shooting method", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 54, pp. 1941-1949.
- [5] Myers T.G., Mitchell S.L., Muchatibaya G. and Myers M.Y., 2007. "A Cubic heat balance integral method for one-dimensional melting of a finite thickness layer", International journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 50, pp.5305-5317.

- [6] Naaktgeboren C., 2007. "The zero-phase Stefan problem", International journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 50, pp.4614-4622.
- [7] Prapainop R. and Maneeratana K., 2004. "Simulation of ice formation by the finite volume method", Songklanakarin J. Sci. Technol., Vol. 26, No. 1, Jan.-Feb. 2004.
- [8] Rincon M.A. and Scardua A., 2008. "The Stefan problem with moving boundary", Bol. Soc. Paran. Mat., (3s) V.26, 1-2.
- [9] Sadoun N., Si-Ahmed E.K. and Legrand J., 2012. "On Heat conduction with phase change: accurate explicit numerical method", Journal of Applied Fluid Mechanics, Vol. 5, No. 1, pp- 105-112.
- [10] Savovic S. and Caldwell J., 2003. "Finite difference solution of one-dimensional Stefan problem with periodic boundary conditions", International journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 46, pp. 2911-2916.
- [11] Sugawara M., Komatsu Y. and Beer H., 2011. "Three-Dimensional melting of ice around a liquid-carrying tube", Heat Mass Transfer, Vol. 47, pp. 139-145, Springer.
- [12] Witula R., Hetmaniok E., Slota, D. and Zielonka A., 2011. "Solution of the two-phase Stefan problem by using the Picards iterative method", Journal of Thermal Science, Vol. 15, Suppl. 1, pp. S21-S26.
- [13] Zhaochun WU, Jianping LUO and Jingmei FENG, 2011. "A Novel algorithm for solving the classical Stefan problem", Journal of Thermal Science, Vol. 15, Suppl. 1, pp. S39-S44.

#### 9.2 บทความจากเอกสารประกอบการประชุม (Proceedings)

## CST-44

[1] จิตติน แดงเที่ยง.การศึกษาภาวะความเย็นและอัตราการผลิตน้ำแข็งจากการเพิ่มประสิทธิภาพของกระบวนการผลิตน้ำแข็งหลอดด้วยวิธีการพันแต่งผิวด้วยลูปปราย.การประชุมเชิงวิชาการเครือข่ายพลังงานแห่งประเทศไทยครั้งที่ 1; วันที่ 11-13 พฤษภาคม 2548; โรงแรมแอมบาสซาเดอร์ ซิตี้ จอมเทียน จังหวัดชลบุรี.

[2] Patrick K. et al., 2008. "Modeling and simulation of ice/snow melting", the 22nd ECMI Modeling Week Conference, Eindhoven, the Netherlands.

### 9.3 รายงาน

[1] Al-Zubaidy E.M., 2006. "A Computational and instructional study of the effect of natural convection on ice melting", M.Sc. Thesis, Department of Technical Education, University of Technology, Iraq.

### 9.4 หนังสือ

[1] Özisik, M. N., 1993. "Heat Conduction", John-Wiley & Sons, New York, USA, pp. 392-398.

[2] Crank, J., 1984. "Free and Moving Boundary Problem", Clarendon Press, Oxford.

[3] Frank P. Incropera and Dewitt, David P, 2002. "Fundamentals of Heat and Mass Transfer", John-Wiley & Sons, New York, USA, pp. 905-916.

[4] Alexiades V. and Solomon A.D., 1993. "Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes", Hemisphere Publishing Corporation, Washington.

[5] Carslaw H.S. and Jaeger J.C., 1959. "Conduction of Heat in Solids", Oxford University Press, London, UK.

[6] Holman J.P., 1992. "Heat Transfer", 7th edition in SI Units, McGraw-Hill, UK.

[7] Versteeg H.K. and Malalasekera W., 1995. "An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method", Longman Scientific & Technical, England.