

โปรแกรมจำลองการแพร่ความร้อนแบบ 2 มิติ ที่สภาวะคงที่

A Computer Program for 2-D Simulating with Steady State Diffusion Heat Transfer

กัมพล อรนนท์¹ และ กิรติ สุกฤษณ์^{1*}

¹ สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี 111 ถนนมหาวิทยาลัย ต.สุรนารี อ.เมือง จ.นครราชสีมา 30000

*keerati@sut.ac.th, 044-22-4325, 044-22-4410-1

บทคัดย่อ

โดยทั่วไปปัญหาทางวิศวกรรมมักประกอบด้วยรูปทรงที่ซับซ้อน ซึ่งยากหรือเป็นไปไม่ได้ที่จะแก้โดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ วิธีเชิงตัวเลขจึงเป็นแนวทางที่ช่วยให้การแก้ปัญหาดังกล่าวเป็นไปได้ และมักพบการประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในงานออกแบบทางวิศวกรรม งานวิจัยนี้นำเสนอการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อแก้ปัญหาการแพร่ซึ่งเป็นรูปแบบปัญหาที่พบเห็นได้ทั่วไป อาทิ การนำความร้อนในวัสดุต่างๆ โปรแกรมถูกพัฒนาสำหรับปัญหาการแพร่สองมิติแบบคงตัว บนพื้นฐานบนกริดไร้โครงสร้าง ระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม และการประมาณค่าแบบวิธีผลต่างกลาง วิธีทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดลแบบจุดต่อจุดถูกใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น ปัญหาการนำความร้อนบนเงื่อนไขขอบต่าง ๆ ถูกใช้เพื่อประเมินความน่าเชื่อถือของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น ผลการเปรียบเทียบพบว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นให้ผลการคำนวณสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำเป็นอย่างดี

คำหลัก: วิธีเชิงตัวเลข; ปัญหาการแพร่; การนำความร้อน; วิธีไฟไนต์โวลุ่ม; กริดไร้โครงสร้าง

Abstract

In engineering applications are typically consist of complex shape which are difficult or impossible to solve with using analytical method. The numerical method is to be a possible way for solving those problems and it is widely used in engineering design applications. This research proposes the development of computer program for solving the diffusion problems which are usually found in many applications, i.e., conduction in various materials. The computer program has been developed for two-dimensional diffusion problem based on unstructured grid, finite volume method, and central differencing scheme. Point-by-point Gauss-Seidel iterative method is implemented to solve the linear system of the equation. The conduction problems on various boundary value problems have been used to assess the reliability of the developed program. It is found that the developed program gives satisfactory results compare with exact solutions.

Keywords: Numerical methods; Diffusion problem; Finite Volume Method; Unstructured Grid.

1. บทนำ

ในงานด้านวิศวกรรม การวิเคราะห์ปัญหาด้านความร้อนและการไหลเป็นเรื่องยากที่จะสามารถทำหยาและวิเคราะห์ผลได้อย่างแม่นยำ เนื่องจาก หนึ่งในคือคณิตศาสตร์ยาก ในการแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยวิธีทางคณิตศาสตร์จะต้องใช้ความรู้ด้านคณิตศาสตร์ขั้นสูงในการวิเคราะห์

และแก้ปัญหา เพื่อจะได้มาซึ่งผลเฉลยที่เรียกว่า ผลเฉลยแม่นยำ (Exact Solution) หรือผลเฉลยวิธีเชิงวิเคราะห์ (Analytical Solution) แต่วิธีนี้สามารถใช้ได้กับปัญหาอย่างง่ายเท่านั้น เหมาะสำหรับการศึกษาในขั้นต้นสำหรับผู้เริ่มศึกษา สองคือรูปทรงยาก การวิเคราะห์ปัญหาความร้อนและการไหลโดยมากมักจะเกิดขึ้นกับปัญหาที่มี

รูปทรงที่ซับซ้อน ความซับซ้อนของรูปทรงที่นำมาใช้วิเคราะห์ ก็จะส่งผลทำให้คณิตศาสตร์มีความยุ่งยากยิ่งขึ้น ด้วยเหตุนี้จึงอาจกล่าวได้ว่า เป็นไปได้ยาก หรืออาจเป็นไปได้เลยที่จะแก้ปัญหาดังกล่าวให้ออกมาในรูปของผลเฉลยแบบแม่นยำ หรือแม้แต่ในรูปของผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ด้วยเหตุนี้วิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) จึงเป็นแนวทางที่ช่วยให้การแก้ปัญหาดังกล่าวเป็นไปได้ และมักจะพบการนำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในงานออกแบบทางวิศวกรรม

งานวิจัยนี้นำเสนอการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อแก้ปัญหาการแพร่ ซึ่งเป็นรูปแบบของปัญหาที่พบเห็นได้ทั่วไป อาทิ การนำความร้อนในวัสดุต่าง ๆ โปรแกรมถูกพัฒนาสำหรับปัญหาแก้แพร่สองมิติที่ผลเฉลยไม่ขึ้นกับเวลา บนพื้นฐานของกริดแบบไร้โครงสร้าง (Unstructured Grid) [1] เนื่องจากมีความยืดหยุ่นสูงในการแทรกตัวเข้ากับรูปทรงของปัญหาที่ซับซ้อน ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม (Finite Volume Method: FVM) [2][3] และการประมาณค่าแบบวิธีผลต่างกลาง (Central Different Method) [3][4] วิธีทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล แบบจุดต่อจุด [5][6] ถูกนำมาใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น ในการประเมินความน่าเชื่อถือของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้น ในเบื้องต้นมักนิยมสอบเทียบ (Validating) กับปัญหาการแพร่ความร้อนในสองมิติ กับเงื่อนไขขอบ (Boundary Condition) ในหลาย ๆ แบบ เพื่อให้มั่นใจได้ว่าโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสามารถจัดการกับเงื่อนไขขอบในแบบต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง โดยการใช้การสอบเทียบกับผลเฉลยที่คำนวณจากวิธีเชิงวิเคราะห์

ในบทความนี้นำเสนอทฤษฎีที่ใช้ในการคำนวณรูปแบบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่สังเคราะห์ได้จากแผนวิธีเชิงตัวเลข การปรับแก้ความคลาดเคลื่อนของการคำนวณ อันเนื่องจากรูปร่างของกริดที่บิดเบี้ยวตามแนวคิดของ Ferziger and M. Peric (1996) [7] และเปรียบเทียบผลของการคำนวณกับผลเฉลยแม่นยำ

2. ทฤษฎีที่ใช้ในการคำนวณ

ในการคำนวณแบบวิธีเชิงตัวเลขจำเป็นที่จะต้องสังเคราะห์สมการควบคุมการไหลของสมการ Navier-Stokes ที่อยู่ในรูปของ Differential Form หรือ Integral Form ให้อยู่ในรูปของสมการทางพีชคณิตที่คอมพิวเตอร์สามารถนำไปใช้ในการคำนวณได้ หรือเรียกว่า สมการดิฟเฟอเรนเชียลก่อน โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์

โวลุ่ม และเนื่องจากความแม่นยำของการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขนี้ขึ้นกับรูปทรงของกริดด้วย วิธีในการปรับแก้ความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยอันเนื่องมาจากความบิดเบี้ยวของกริดมีหลากหลายวิธี ในงานวิจัยนี้ใช้วิธีโหนดช่วย [7] เป็นการจำลองโหนดใหม่ขึ้นมาแทนโหนดเดิมที่ไม่ตั้งฉากกับด้านของกริด

2.1 วิธีไฟไนต์โวลุ่ม

สมการควบคุมสำหรับปัญหาการแพร่ในสองมิติที่สถานะคงที่ สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) + S_\phi = 0 \quad (1)$$

เมื่อ Γ คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ ϕ คือตัวแปรที่สนใจ และมี S_ϕ เป็นพจน์ source/ sink

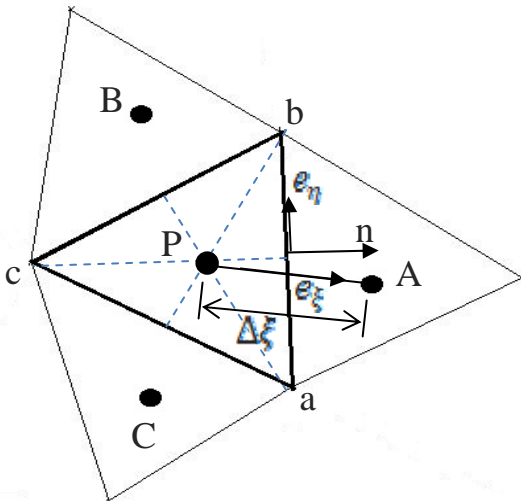
ไฟไนต์โวลุ่มเป็นวิธีดิฟเฟอเรนเชียลสมการควบคุม (1) ในรูป PDE ไปอยู่ในรูปสมการพีชคณิต โดยการอินทิเกรตสมการควบคุม (1) รอบปริมาตรควบคุม (Control Volume: CV) เพื่อพิจารณาสมดุลของฟลักซ์ที่ไหลผ่านเข้าออกผิวควบคุม (Control Surface: S) เพื่อให้สอดคล้องกับหลักการสมดุลฟลักซ์ดังกล่าว จึงเปลี่ยนรูปสมการอินทิกรัล ให้อยู่ในรูปของการอินทิเกรตรอบผิวควบคุมโดยทฤษฎี Gauss's theorem จะได้

$$\int_S (\Gamma \text{grad} \phi) \cdot \hat{n} dS + \int_{CV} S_\phi dV = 0 \quad (2)$$

เมื่อ dV คือปริมาตรควบคุม จากนั้นเปลี่ยนรูปสมการอินทิเกรตรอบผิวควบคุม (2) ให้อยู่ในรูปของผลรวมของสมบัติรอบผิวควบคุมนั้น

$$\sum_f (\Gamma \text{grad} \phi)_{A_f} \cdot \hat{n}_f + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (3)$$

เมื่อ f คือหมายเลขผิวควบคุมที่ปิดล้อมปริมาตรควบคุมที่พิจารณา A_f คือพื้นที่ของผิวควบคุมที่ f และ ΔV เป็นชื่อโดยเฉลี่ยในแต่ละปริมาตรควบคุมที่กำลังพิจารณา

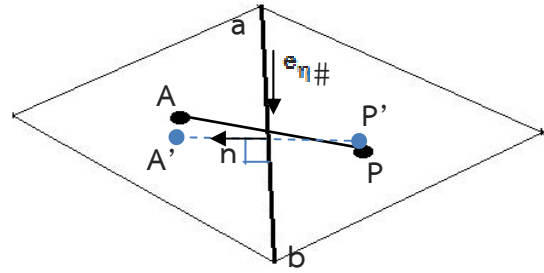


รูปที่ 1 รายละเอียดของกริดแบบไร้โครงสร้าง
รูปสามเหลี่ยม

เนื่องจากสมการ (3) เป็นสมการที่นิยามบนพื้นฐานกริดที่
เวกเตอร์ e_f ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง
centroid โหนด P ไปยัง centroid ของโหนดที่อยู่รอบ ๆ
จะต้องผ่านจุดกึ่งกลางด้าน หรือกล่าวคือต้องอยู่ใน
ทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ n (unit normal vector) หาก
ไม่เป็นเช่นนั้นแล้ว (รูปที่ 1) ความแม่นยำจากการคำนวณ
ตามสมการที่ (3) ก็จะมีค่าความถูกต้องน้อยลงไป หรืออาจ
กล่าวได้อีกว่าสมการ (3) เป็นสมการที่นิยามบนกริดแบบ
โครงสร้าง (structured grid) แต่โดยทั่วไปแล้วเป็นเรื่องที่
ยากมากที่จะควบคุมให้เป็นกริดแบบโครงสร้างได้
เนื่องจากความซับซ้อนของรูปทรงของปัญหา ดังนั้นการ
ปรับสมการดิสครีทให้เหมาะสมกับกริดที่ไร้โครงสร้าง
(unstructured grid) จึงเป็นวิธีการที่ดีในการแก้ปัญหา
ความไม่แม่นยำจากความไร้โครงสร้างของกริด

2.2. โหนดจำลอง (Auxiliary Node)

การปรับสมการดิสครีทให้เหมาะสมกับกริดไร้
โครงสร้างเพื่อให้การคำนวณมีความแม่นยำมากขึ้นนั้นก็มีผู้
นำเสนอไว้หลายวิธี บทความนี้ได้ใช้วิธีโหนดจำลองในการ
ปรับแก้ความไม่แม่นยำดังกล่าว ซึ่งเป็นแนวคิดของ
Ferziger and M. Peric (1996) โหนด P' และ A' เป็น
โหนดจำลองบนเซลล์ P และเซลล์ A ตามลำดับ ซึ่ง
เวกเตอร์ \overline{PA} จะขนานกับเวกเตอร์ n (ตั้งฉากกับด้าน)
และผ่านจุดกึ่งกลางด้านนั้นพอดี ดังแสดงในรูปที่ 2 ซึ่ง
โหนดจำลองที่สร้างขึ้นมานี้ จะต้องมีทิศทางของเวกเตอร์
 $\overline{PP'}$ และ $\overline{AA'}$ วางตัวในแนวขนานกับเวกเตอร์ e_n



รูปที่ 2 การวางตัวของโหนดหลักและโหนดจำลอง
ดังนั้นพจน์การแพร่ในสมการ (3) ซึ่งประมาณค่าโดยวิธี
ผลต่างกลางสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\sum_f \Gamma_f (\hat{n} \cdot \text{grad} \phi) A_f = \sum_f D_f (\phi_A - \phi_P)_f + \sum_f S_{d-cross,f} \tag{4}$$

เมื่อ $D_f = \frac{\Gamma_f A_f}{\Delta \xi}$ คือสัมประสิทธิ์การแพร่ และ

$$S_{d-cross,f} = \Gamma_f A_f \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{f'} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{f'} \right)^{old}$$

เป็นข้อสังเกตของค่าไม่ตั้งฉากของแนวจุดโหนด P-A
ที่ด้าน f โดยที่ $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{f'} \approx \frac{\phi_{A'} - \phi_{P'}}{\Delta L_{P'-A'}}$ และ

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{f'} = \frac{1}{\Delta V} \sum_f \phi_f (\hat{n}_f \cdot A_f) \text{ และ } \Delta L_{P'-A'} \text{ เป็น}$$

ระยะห่างระหว่างโหนดจำลองทั้งสอง ดังนั้น สมการ (4)
สามารถจัดรูปใหม่อีกครั้งจะได้

$$\sum_i [D_i (\phi_i - \phi_p) + S_i] + \bar{S} \Delta V = 0 \tag{5}$$

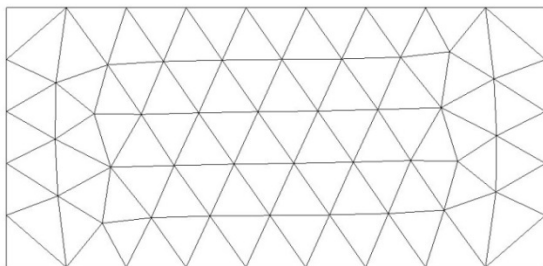
เมื่อ i เป็น running number ของเซลล์ที่อยู่โดยรอบ
เซลล์ P จะเห็นได้ว่าสมการที่ (5) เป็นการจัดรูปสมการ
จากสมการในรูปอินทิกรัล (2) ให้อยู่ในรูปแบบสมการ
พีชคณิตที่คอมพิวเตอร์สามารถเอาไปใช้คำนวณได้ โดยใช้
ระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม จากสมการ (5) นี้เราสามารถจัด
รูปอีกครั้งให้อยู่ในรูปของเซลล์ P ได้ดังนี้

$$a_p \phi_p = \sum_i D_{i,f} \phi_{i,f} + \sum_i S_{i,f} + \bar{S} \Delta V \tag{6}$$

เมื่อ $a_p = \sum_i D_{i,f}$ และ $D_{i,f}$ คือสัมประสิทธิ์การแพร่ที่เซลล์ i ด้านผิวควบคุม f ของเซลล์ P (ดูสมการ (4)) สมการที่ (6) นี้เป็นสมการที่ใช้ในการคำนวณในทุกเซลล์ของโดเมนของปัญหาการแพร่ที่เราพิจารณา ดังนั้นจำนวนสมการที่ต้องคำนวณจะมีค่าเท่ากับจำนวนเซลล์ของโดเมนของปัญหาที่สร้างขึ้น เมื่อเอาทุกสมการมารวมกันจะทำให้ได้ระบบสมการขนาดใหญ่ในรูปของสมการเมตริกซ์ขนาด $N \times N$ เมื่อ N คือจำนวนเซลล์ทั้งหมดในโดเมนของปัญหาที่สร้างขึ้น ดังนั้นจึงไม่สามารถแก้สมการในรูปของระบบสมการเชิงเส้นที่มีขนาดใหญ่ได้ ในการแก้ปัญหาเราสามารถแก้สมการนี้ได้โดยใช้การทำซ้ำตามหลักการของเกาส์-ไซเดล [5][6]

3. การสอบเทียบความแม่นยำของโปรแกรม

การพัฒนาโปรแกรมสำหรับการคำนวณทางซีเอฟดีนี้สำคัญที่สุดคือโปรแกรมจะต้องสามารถจัดการกับปัญหาขอบ (Boundary Value Problem) ได้อย่างถูกต้อง ถ้าโปรแกรมสามารถจัดการกับปัญหาขอบได้เป็นอย่างดีแล้ว การคำนวณโดยภาพรวมก็จะมีคุณภาพถูกต้องตามไปด้วย รวมไปถึงการจัดการกับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน ถ้าโปรแกรมสามารถจัดการกับปัญหาขอบนี้ได้ถูกต้องโดยทั่วไปการคำนวณก็จะมีคุณภาพตามไปด้วย ซึ่งในที่นี้จะทดสอบใน 3 กรณี ได้แก่ กรณีปัญหาขอบแบบ 1) Dilichlet Condition 2) ปัญหาแบบ Neumann+ Dilichlet Condition และ 3) Dilichlet Condition with Heat Source การจำลองจะทำบนโดเมนของปัญหารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ขนาด 100×50 เซนติเมตร โดยใช้กริดสามระดับ เพื่อหา Grid-Independent ได้แก่กริดหยาบขนาด 95 เซลล์ กริดละเอียดขนาด 415 เซลล์ และกริดละเอียดสุด 1697 เซลล์ ซึ่งทั้งหมดเป็นกริดสามเหลี่ยมแบบไร้โครงสร้าง ดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3 แสดงกริดหยาบขนาด 95 เซลล์

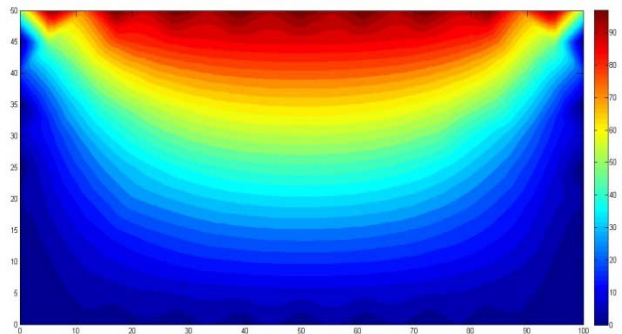
3.1 เงื่อนไขขอบแบบ Dilichlet Condition

ในปัญหานี้เป็นการแก้สมการ Laplace's Equation โดยไม่มีซอสเข้ามาเกี่ยวข้อง โดยจะกำหนดค่าเริ่มต้นของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นบนด้านแต่ละด้านของโดเมนปัญหา โดยขอบด้านบนของโดเมนกำหนดให้มีอุณหภูมิ $u(x,50)=100^\circ\text{C}$ และด้านที่เหลือให้มีอุณหภูมิเป็น 0°C โดยมีผลเฉลยที่คำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ได้ผล ดังสมการ (7)

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \quad (7)$$

เมื่อ $C_n = \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{100(1 - (-1)^n)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{L} H\right)}$ และ n เป็น

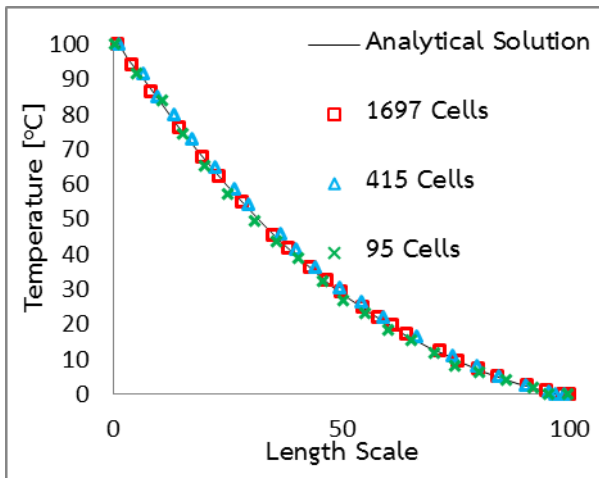
จำนวนนับ ผลจากการคำนวณด้วยโปรแกรมสามารถนำมาแสดงผลในรูปของกราฟฟิกของการกระจายตัวของความร้อนโดยรอบพื้นผิวของโดเมน ดังแสดงในรูปที่ 4 ในที่นี้เป็นการแสดงผลการจำลองจากกริดที่มีความละเอียดต่ำสุด คือ 95 เซลล์



รูปที่ 4 การกระจายตัวของความร้อนบนกริดหยาบขนาด 95 เซลล์

การแสดงผลดังภาพนี้ความละเอียดของข้อมูลต่ำ เนื่องจากเป็นการแสดงผลจากกริดที่หยาบที่สุด ทำให้การแสดงผลเกิดสีที่ขึ้นบนภาพไม่สม่ำเสมอ โดยเฉพาะที่มุมบนของภาพทั้งซ้ายและขวาอันเป็นผลจากความละเอียดต่ำของกริดและเมื่อนำผลการคำนวณจากสมการผลเฉลยด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ ตามสมการที่ (7) มาเปรียบเทียบกับผลของการจำลองโดยใช้กริดใน 3 ระดับดังที่กล่าว ได้ผล

ดังรูปที่ 5 ในการแสดงผลนี้ เพื่อให้ง่ายในการทำ ความเข้าใจ และแสดงผลการเปรียบเทียบให้เห็นได้อย่าง ชัดเจน ผู้วิจัยได้ทำการเรียงลำดับข้อมูลใหม่ โดยให้ เรียงลำดับผลการคำนวณอุณหภูมิที่ได้จากมากไปหาน้อย ซึ่งจุดบนกราฟคืออุณหภูมิที่เกิดขึ้นบนเซลล์แต่ละเซลล์ แต่เนื่องจากจำนวนเซลล์ในการคำนวณแต่ละครั้งไม่ เท่ากัน เพื่อให้การแสดงผลในรูปแบบของกราฟสามารถ เข้าใจได้ง่าย ในการแสดงผลจึงได้มีการ ลดสเกล ของ จำนวนเซลล์ลงให้มีขนาดเต็มหนึ่งร้อยหน่วย (แกน x) เท่ากัน ดังกราฟรูปที่ 5 จะเห็นได้ว่ากราฟทั้ง 3 เส้นที่ได้ จากการจำลองมีความสอดคล้องกับข้อมูลจากผลเฉลย ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์เป็นอย่างดี แม้กริดที่ใช้ในการคำนวณ ที่หยาบที่สุด ซึ่งน้อยกว่าหลายสิบเท่าก็สามารถให้ผลการ คำนวณได้ความแม่นยำที่เทียบเท่ากริดละเอียดได้ นั้น แสดงให้เห็นว่าการคำนวณปัญหาด้านการแพร่ความร้อน อาจไม่มีความจำเป็นที่จะต้องใช้กริดที่มีความละเอียดสูง มากนักก็ให้คำตอบที่แม่นยำได้



รูปที่ 5 กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงตัวเลขเทียบกับผลเฉลยเงื่อนไขที่ 1

และกริดที่ใช้ในการคำนวณค่อนข้างเป็นกริดคุณภาพดี (รูปที่ 3) คือรูปร่างใกล้เคียงรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทำให้ พจนความคลาดเคลื่อนจากความไม่ตั้งฉาก ($S_{d-cross,f}$) มี ค่าน้อยมาก ทำให้ผลการคำนวณให้ความแม่นยำสูงแม้ ใช้กริดน้อย

3.2 เงื่อนไขขอบแบบ Neumann + Delichlet Condition

ในเงื่อนไขขอบของปัญหานี้จะใช้การกำหนด อุณหภูมิเป็นค่าคงที่ที่ด้านสองด้านคือด้านบนและด้าน ข้างขวาของโดเมนให้มีขนาดอุณหภูมิ $u(x,50)=100$ °C และ $u(100,y)=50$ °C ตามลำดับ ส่วนด้านที่เหลือ กำหนดให้เป็นฉนวน ($\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = 0$ และ $\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = 0$) และไม่มีขอสเข้ามาเกี่ยวข้องเช่นเคย ปัญหาในข้อนี้ยังคง เป็นการแก้ปัญหาของสมการ Laplace's Equation ซึ่งมี ผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณเชิงวิเคราะห์ ดังสมการนี้

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) \quad (8)$$

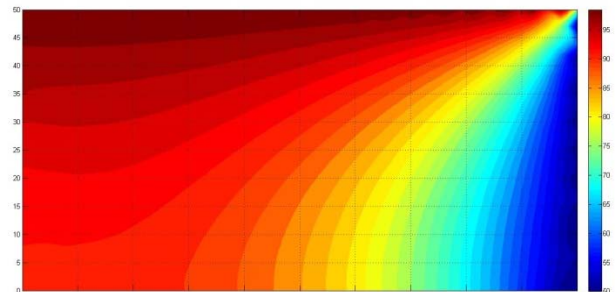
$$\text{โดย } u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \frac{\cos(\lambda_n x) \cosh(\lambda_n y)}{\cosh(\lambda_n H)}$$

$$C_n = \frac{400(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \text{ และ } \lambda_n = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{L}$$

$$\text{และ } u_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cdot \frac{\cos(\gamma_m x) \cosh(\gamma_m y)}{\cosh(\gamma_m L)}$$

$$C_m = \frac{200(-1)^{m+1}}{(2m-1)\pi} \text{ และ } \gamma_m = \frac{2m-1}{2} \cdot \frac{\pi}{H}$$

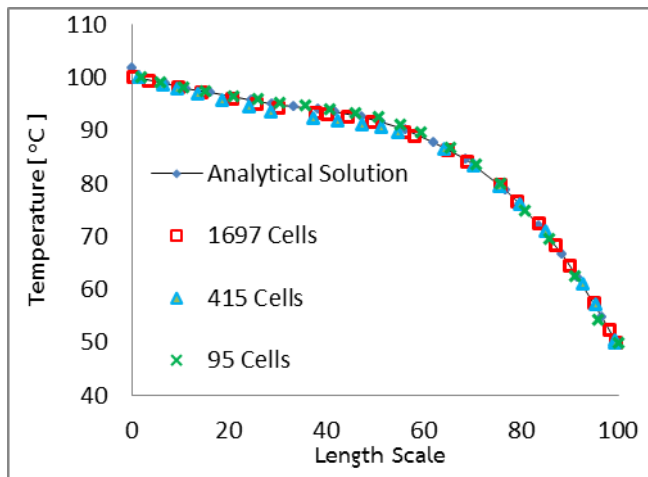
ผลจากการคำนวณโดยโปรแกรมแสดงการกระจายความ ร้อนที่เกิดขึ้นบนผิวโดเมนแสดงได้ผลดังรูปที่ 6 ซึ่งในรูป เป็นผลการคำนวณจากกริดที่มีความละเอียดปานกลางคือ ขนาด 415 เซลล์ จากการวิเคราะห์ในเบื้องต้น ผลการ คำนวณมีความสมเหตุสมผลกับเงื่อนไขขอบของปัญหา เนื่องจากผิวด้านข้างขวาและด้านขอบบนเป็นการกำหนด เงื่อนไขแบบอุณหภูมิคงที่



รูปที่ 6 การกระจายตัวของความร้อนในปัญหาที่ 2 บน กริดขนาด 415 เซลล์

ทำให้อุณหภูมิที่ขอบดังกล่าวไม่มีการเปลี่ยนแปลง ส่วนอีกสองด้านที่เหลือเป็นฉนวน ไม่มีความร้อนเข้ามา

เกี่ยวข้องทำให้ตลอดแนวของขอบนี้ มีอุณหภูมิที่แตกต่างกันออกไปตามสมบัติการนำความร้อนของวัสดุ ซึ่งในที่นี้กำหนดให้โดเมนของปัญหามีสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากันในทุกทิศทางปัญหา เป็นแบบ homogeneous differential equation คือไม่มีพจน์ซอสฟังก์ชันเข้ามาเกี่ยวข้อง และพิจารณาปัญหาที่สภาวะคงที่ สมบัติการนำความร้อนของวัสดุจึงไม่มีผลต่อผลการจำลอง และเมื่อนำผลการจำลองที่ได้จากการคำนวณบนกริดทั้ง 3 ระดับแสดงผลในรูปกราฟ ปรากฏว่า ให้ผลสอดคล้องกับผลการคำนวณด้วยสมการวิธีเชิงวิเคราะห์เป็นอย่างดี ในกริดทั้ง 3 ขนาด



รูปที่ 7 กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงตัวเลขเทียบกับผลเฉลยเงื่อนไขที่ 2

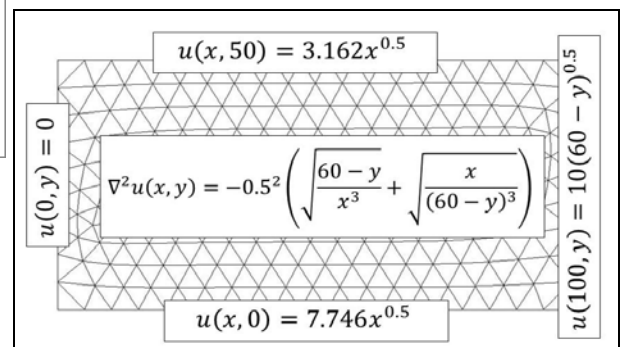
โดยขนาดของกริดมีผลต่อความคลาดเคลื่อนน้อยมากดังแสดงในรูปที่ 7 แสดงให้เห็นว่าปริมาณกริดที่ใช้สำหรับปัญหาการแพร่ความร้อนเพียงอย่างเดียวนี้ มีผลน้อยมากต่อความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น ปัจจัยอีกประการที่ส่งผลให้การคำนวณทั้งสองวิธีมีความสอดคล้องกันมากคือผลเฉลยในเชิงวิเคราะห์ (สมการ (8)) แสดงในรูปของสมการ Fourier series เป็นสมการผลรวมของพจน์ย่อยรวมกันจำนวน infinity พจน์สมการนี้จึงให้ค่าแม่นยำ แต่ในทางปฏิบัติไม่สามารถทำได้ จึงคำนวณสมการผลเฉลยนี้เพียง 100 พจน์แรกเท่านั้น โดยถือว่าพจน์ที่เหลือมีค่าน้อยมาก จะเห็นได้ว่าการคำนวณทั้งสองวิธีต่างก็มีการตัดเศษเหมือนกัน แต่อย่างไรก็ตามผลการคำนวณทั้ง 2 วิธีก็ให้แนวโน้มของผลเฉลยที่สอดคล้องกันเป็นอย่างดี ซึ่งผลของการคำนวณแบบตัดเศษและไม่ตัดเศษจะเห็นได้อย่างชัดเจนในเงื่อนไขแบบที่ 3 ดังจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

3.3 เงื่อนไขแบบ Dilichlet with Heat Source Condition

ในปัญหานี้จะกำหนดเงื่อนไขขอบที่เป็นฟังก์ชันโดยขึ้นกับตำแหน่งของขอบบนโดเมน และนอกจากนี้ภายในโดเมนยังมี Heat Source เกิดขึ้นตลอดทั่วทั้งโดเมนดังแสดงในรูปที่ 8 ปัญหาดังกล่าวเป็นการนำเอาสมการที่รู้ค่าอยู่แล้ว แล้วกำหนดเงื่อนไขให้โปรแกรมคำนวณเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม วิธีนี้ มีข้อดีคือทำให้ได้สมการที่นำมาใช้ในการสอบเทียบเป็นสมการแม่นยำตรง โดยผลเฉลยของปัญหาดังกล่าวแสดงดังสมการ (9)

$$u(x, y) = \sqrt{x(60 - y)} \quad (9)$$

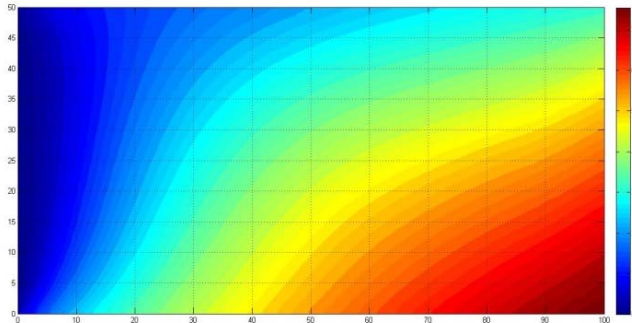
และให้ผลเฉลยด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขดังรูปที่ 9 เป็นการแสดงผลโดยใช้กริดละเอียดขนาด 1697 เซลล์ และเทียบผลเฉลยด้วยกราฟของสมการแม่นยำตรงได้ดังรูปที่ 10



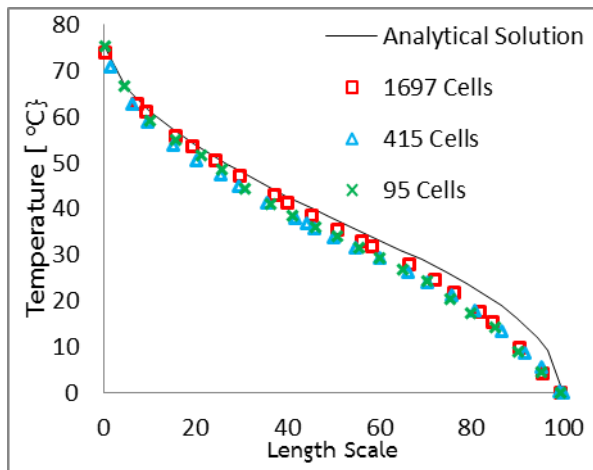
รูปที่ 8 แสดงเงื่อนไขในการคำนวณของปัญหาที่ 3

จะเห็นได้ว่า โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนี้ ให้ผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขที่สอดคล้องกับผลการคำนวณจากสมการแม่นยำตรง อาจจะมี ความคลาดเคลื่อนบ้างเล็กน้อย เนื่องจากการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขเป็นกระบวนการคำนวณที่อาศัยการทำซ้ำไปหลาย ๆ รอบ เพื่อให้ได้ผลการคำนวณที่ลู่เข้าสู่คำตอบมากขึ้นเรื่อย ๆ จึงไม่สามารถให้ผลการคำนวณที่ถูกต้องร้อยเปอร์เซ็นต์ตามผลเฉลยแบบแม่นยำตรงได้ หรือแม้แต่ผลเฉลยโดยใช้วิธีเชิงวิเคราะห์เอง ก็ยังไม่ใช่ผลเฉลยโดยวิธีแม่นยำตรง จึงอาจมีผลต่อความแม่นยำอยู่บ้าง แต่โดยภาพรวมแล้ว โปรแกรมสามารถแสดงให้เห็นแนวโน้มของผลเฉลยของ

ปัญหาที่สอดคล้องกับผลการคำนวณเชิงวิเคราะห์ และ ผลเฉลยแม่นยำตรงได้เป็นอย่างดี จึงเชื่อได้ว่าโปรแกรม ที่พัฒนาขึ้นมีความแม่นยำน่าเชื่อถือ



รูปที่ 9 แสดงผลการคำนวณด้วยกริดขนาด 1697 เซลล์



รูปที่ 10 กราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงตัวเลข เทียบกับผลเฉลยเงื่อนไขที่ 3

4. บทสรุป

ในการสอบเทียบความแม่นยำของโปรแกรมที่ พัฒนาโดยใช้การเปรียบเทียบกับผลเฉลยจากสมการการ วิเคราะห์ ที่มีความน่าเชื่อถือ และการกำหนดเงื่อนไขขอบ ที่แตกต่างกันออกไปตามแต่ละปัญหา จะเห็นได้ว่า โปรแกรมสามารถจัดการกับปัญหาในแต่ละแบบได้เป็น อย่างดี และมีความสอดคล้องกับผลเฉลยในทุกปัญหาที่ นำมาวิเคราะห์ อนึ่งกริดที่ใช้ในการคำนวณมีสามระดับที่ มีความละเอียดแตกต่างกันออกไป แต่จากผลการคำนวณ แสดงให้เห็นว่า ในการคำนวณในปัญหาการแพร่ ความ ละเอียดของกริด มีผลน้อยมากผลเฉลยของการคำนวณ และให้ผลที่แม่นยำได้ไม่ต่างจากกริดละเอียด ดังนั้นอาจ

สรุปได้ว่าการวิเคราะห์ปัญหาการแพร่อย่างเดียวนี้อาจ ไม่จำเป็นต้องใช้กริดที่มีความละเอียดมากเกินไปในการ คำนวณ ซึ่งจะทำให้ไม่สิ้นเปลืองทรัพยากร และการ คำนวณก็จะเร็วขึ้น

5. เอกสารอ้างอิง

[1] Mavriplis, D.J. (1997). UNSTRUCTURED GRID TECHNIQUES, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 29, January 1997, pp. 473-514.

[2] Eymard, R., Gallouët, T. and Herbin, R. Finite volume methods, in *Handbook of Numerical Analysis*, P.G. Ciarlet and J.L. Lions Eds. (to appear). Prépublication No 97-19 du LATP, UMR 6632, Marseille (1997).

[3] Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. (2007). *An introduction to Computational Fluidynamics The finite volume method*, 2nd editions, ISBN: 978-0-13-127498-3, Bell & Bain Limited, Glasgow.

[4] Richard, B. et. al. (1994). *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, 2nd editions, which is available for purchase from the Society for Industrial and Applied Mathematics (<http://www.siam.org/books>).

[5] Barrett, R.; Berry, M.; Chan, T. F.; Demmel, J.; Donato, J.; Dongarra, J.; Eijkhout, V.; Pozo, R.; Romine, C.; and van der Vorst, H.(1994). *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, 2nd editions, PA: SIAM, Philadelphia.

[6] Kahan, W. *Gauss-Seidel Methods of Solving Large Systems of Linear Equations*. Ph.D. thesis. Toronto, Canada, University of Toronto, 1958.

[7] Ferziger, J. H. and Peric, M. (1996). *Computarional Methods for Fluid Dynamics*, 3rd editions, ISBN 3-540-42074-6, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.