การหมุนของจานระนาบที่มีมวลวางอยู่โดยไม่ลื่นไถล
Rotating Horizontal Plate with a Non-Slipping Mass on Top

เลอเกียรติ์ วงศ์สารพิกูล[1*], พิมพ์เพชร สระทองอุ่น[1]

[1] สาขาวิชาวิศวกรรมยานยนต์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีไทย-ญี่ปุ่น
1771/1 ถ.พัฒนาการ เขตสวนหลวง แขวงสวนหลวง กรุงเทพฯ 10250
*ผู้ติดต่อ: E-mail: lerkiat@tni.ac.th โทรศัพท์: 02-763-2600 x 2909 โทรสาร: 02-763-2800 x 2900

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ศึกษาการหมุนของจานระนาบที่มีมวลวางอยู่ด้านบนเริ่มต้นเคลื่อนที่จากสภาวะอยู่นิ่ง โดยมวลไม่ลื่นไถลตลอดการเคลื่อนที่ เนื่องจากความเร่งรวมของมวลสารถูกจำกัดโดยแรงเสียดทานของมวลสารกับพื้นจานระนาบ ค่าความเร่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุมของจานระนาบจึงถูกจำกัดไปด้วย ค่าความเร่งเชิงมุมสูงสุดและความเร็วเชิงมุมสูงสุดที่สามารถเป็นไปได้โดยมวลสารไม่ลื่นไถลสามารถหาได้โดยง่าย สำหรับการเคลื่อนที่เริ่มต้นจากสภาวะอยู่นิ่ง กรณีพิเศษแรกที่พิจารณาคือกรณีที่ความเร่งเชิงมุมของการหมุนมีค่าคงที่ ซึ่งพบว่ามวลสารจะลื่นไถลก่อนความเร็วเชิงมุมของการหมุนจะมีค่าสูงสุดที่เป็นไปได้เสมอ สำหรับกรณีที่ความเร่งเชิงมุมมีลักษณะเชิงเส้นซึ่งลดลงด้วยอัตราคงที่ พบว่าการหมุนสามารถเพิ่มความเร็วขึ้นจนมีค่าสูงสุดได้โดยไม่เกิดการลื่นไถล ในกรณีที่กำหนดให้ความเร่งรวมมีค่าสูงสุดตลอดเวลา จะสามารถเขียนสมการอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ได้ และหาการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นได้โดยการแก้สมการนั้น ในทั้งสองกรณีหลัง พบด้วยว่าจะสามารถกำหนดอัตราความเร่งที่จะทำให้จานระนาบหมุนจากสภาพอยู่นิ่งจนมีความเร็วเชิงมุมสูงสุดและลดลงจนถึงศูนย์ใหม่อย่างต่อเนื่องเป็นวัฏจักรได้โดยมวลไม่ลื่นไถล

คำหลัก: จานระนาบหมุน, การลื่นไถล, ความเร่งเชิงมุม, ความเร็วเชิงมุม

Abstract

This paper considered the rotation from rest of a horizontal plate with a mass on top which remained non-slipping through out the motion. Since the total acceleration of the mass was limited by the friction force between the mass and the plate, the values of angular acceleration and velocity were also limited. With the non-slipping condition, the maximum values of angular acceleration and velocity can be easily calculated. For the motion from rest being studied, the first special case is that in which the angular acceleration was constant. It was found that the mass would always slip before the angular velocity reached the maximum value. For the case in which the acceleration decreased linearly, it was found that the angular velocity can reach the maximum value without the mass slipping. The case in which the total acceleration of the mass was always at the maximum value, a differential equation for the motion was derived and solved numerically. In the two latter cases, it was possible to specify angular

accelerations to create non-slipping cyclic motions in which the plate started rotating from rest, attained the maximum angular velocity and then started slowing down until the velocity become zero again, repeatedly.

***Keywords**:* Rotating horizontal plates, slipping, angular acceleration, angular velocity.

1. บทนำ

ปัญหาการลื่นไถลของวัตถุในระหว่างการเคลื่อนที่เป็นโจทย์พื้นฐานที่มีการศึกษาในหนังสือกลศาสตร์ทั่วไป [1,2,3] ในกรณีของวัตถุที่วางอยู่บนพื้นระนาบที่กำลังหมุน เมื่อกำหนดมวลสารของวัตถุ สัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างวัตถุกับพื้น และระยะห่างจากจุดหมุนของวัตถุ เป็นแบบฝึกหัดพื้นฐานที่จะคำนวณความเร่งเชิงมุมสูงสุดหรือความเร็วเชิงมุมสูงสุดที่สามารถจะเกิดขึ้นได้โดยวัตถุจะไม่ลื่นไถล แต่เนื่องจากความเร่งของวัตถุที่ระยะห่างใด ๆ จากจุดหมุนจะมีส่วนประกอบของความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมอยู่ด้วยกัน ดังนั้น ในระหว่างการเคลื่อนที่ที่ความเร็วเชิงมุมไม่ได้มีค่าคงที่ นั่นคือมีทั้งความเร่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุมในเวลาเดียวกัน ข้อแม้ของการไม่ลื่นไถลจะก่อให้เกิดข้อจำกัดต่อความเร่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุมในขณะใด ๆ ของการเคลื่อนที่ ปัญหาหนึ่งในทำนองนี้คือการเริ่มหมุนจากสภาวะอยู่นิ่งจนมีความเร็วเชิงมุมสูงสุดโดยวัตถุไม่ลื่นไถล ซึ่งเป็นโจทย์ของการศึกษานี้

2. ทฤษฎีพื้นฐาน

ให้ก้อนวัตถุที่มีมวลสาร *m* kg วางอยู่บนจานระนาบที่หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\dot{\theta}$ และความเร่งเชิงมุม $\ddot{\theta}$ ที่ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของการหมุน *r* ให้สัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างจานระนาบกับมวลมีค่าเท่ากับ μ แรงเสียดทานสูงสุดระหว่างพื้นกับมวลคือ [1,2,3]

$$F = \mu mg \tag{1}$$

เมื่อ *g* คือความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ถ้าหากไม่มีการลื่นไถล ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางการหมุนมีค่าคงที่ ดังนั้น ความเร่งของการหมุนของมวล m คือ [1,2,3]

$$\vec{a} = r\ddot{\theta}\,\vec{e}_r - r\dot{\theta}^2\,\vec{e}_\theta \tag{2}$$

เมื่อ $\vec{e}_r$ และ $\vec{e}_\theta$ คือเวคเตอร์หน่วยตามแนวรัศมีและแนวเส้นสัมผัสตามลำดับ ดังนั้นขนาดของความเร่งรวมคือ

$$|\vec{a}| = \sqrt{(r\ddot{\theta})^2 + (r\dot{\theta}^2)^2} \tag{3}$$

เนื่องจากแรงเสียดทานระหว่างวัตถุและพื้นจานระนาบเป็นแรงเดียวที่กระทำต่อวัตถุในระนาบของการเคลื่อนที่ จากกฎข้อที่สองของนิวตัน($\sum F = ma$) ขนาดของแรงเสียดทาน *f* ระหว่างวัตถุและพื้นจานระนาบคือ

$$f = m[(r\ddot{\theta})^2 + (r\dot{\theta}^2)^2]^{1/2}$$

ถ้าหากวัตถุไม่เกิดการลื่นไถล แรงเสียดทานนี้จะต้องน้อยกว่าแรงเสียดทานสูงสุดใน (1) นั่นคือ

$$m[(r\ddot{\theta})^2 + (r\dot{\theta}^2)^2]^{1/2} \le \mu mg$$

หรือสามารถเขียนอีกรูปหนึ่งคือ

$$(\ddot{\theta})^2 + (\dot{\theta}^2)^2 \le c^4 \tag{4}$$

เมื่อ *c* เป็นพารามิเตอร์ที่ตั้งขึ้นเพื่อความสะดวกมีหน่วยเป็น (1/เวลา) และมีความจำกัดความดังนี้

$$c^2 = (\frac{\mu g}{r}) \tag{5}$$

จากสมการ(4) ค่าความเร่งเชิงมุมสูงสุดที่สามารถจะมีได้โดยวัตถุไม่ลื่นไถลจะเกิดขึ้นเมื่อความเร็วเชิงมุมมีค่าเป็นศูนย์ เช่น ในตอนเริ่มต้นหมุนจานระนาบจากสภาวะอยู่นิ่ง นั่นคือ

$$\ddot{\theta}_{\max} = c^2 \tag{6}$$

ในทำนองเดียวกัน ค่าความเร็วเชิงมุมสูงสุดที่สามารถจะมีได้โดยวัตถุไม่ลื่นไถลจะเกิดขึ้นเมื่อความเร่งเชิงมุมมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นความเร็วเชิงมุมสูงสุดคือ

$$\dot{\theta}_{\max} = c \tag{7}$$

ในการศึกษานี้ เราจะพิจารณาการหมุนของจานระนาบเริ่มต้นจากสภาวะอยู่นิ่งโดยมีเป้าหมายคือต้องการให้จานระนาบมีความเร็วเชิงมุมสุดท้ายตาม

สมการ (7) และวัตถุที่วางอยู่บนจานระนาบมวลสาร m ไม่เกิดการลื่นไถลตลอดการเคลื่อนที่ ในการเคลื่อนที่นี้สร้างสมมุติฐานด้วยว่า สามารถสร้างความเร่งเชิงมุมเท่าใดก็ได้ตามต้องการ นั่นคือ ไม่มีข้อจำกัดในการใส่แรงบิดต่อจานระนาบ

3. การเคลื่อนที่กรณีพิเศษ

เริ่มต้นโดยการพิจารณากรณีพิเศษ 2 กรณี ในการควบคุมความเร่งในการหมุนจานระนาบดังต่อไปนี้คือ

3.1 ความเร่งคงที่

กำหนดให้ความเร่งเชิงมุมของการเคลื่อนที่มีค่าคงที่ดังนี้

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= ac^2, \quad 0 < t < t_1 \\ \ddot{\theta} &= 0, \quad t_1 < t \end{aligned} \qquad (8)$$

เมื่อ t_1 คือเวลาที่วัตถุเริ่มลื่นไถล และ a คือพารามิเตอร์ที่มีค่า

$$0 < a \le 1 \qquad (9)$$

เนื่องจากจานระนาบเริ่มต้นจากสภาพอยู่นิ่ง ความเร็วเชิงมุมที่เวลา t ใดๆ เมื่อ $0 < t < t_1$ มีค่าเท่ากับ

$$\dot{\theta} = ac^2 t \qquad (10)$$

เนื่องจากวัตถุไม่ลื่นไถล เมื่อแทนค่าจากสมการ (8) และ (10) ลงในสมการที่ (4) จะได้

$$(ac^2)^2 + (ac^2)^4 t^4 \le c^4 \qquad (11)$$

เวลา t_1 ที่วัตถุเริ่มลื่นไถลจะหาได้จากสมการ

$$(ac^2)^2 + (ac^2)^4 {t_1}^4 = c^4$$

หรือ

$$t_1 = \frac{1}{c}\frac{(1-a^2)^{1/4}}{a} \qquad (12)$$

ความเร็วเชิงมุมในขณะที่วัตถุเริ่มลื่นไถลสามารถหาได้จาก (12) และ (10) นั่นคือ

$$\dot{\theta}(t = t_1) = ac^2 t_1 = (1-a^2)^{1/4} c \qquad (13)$$

จากสมการ (9) a มีค่าน้อยกว่า 1 เสมอ ดังนั้น จะเห็นได้จาก (13) ว่าค่าความเร็วเชิงมุมสุดท้ายจะน้อยกว่าค่าความเร็วสูงสุดที่สามารถมีได้ใน (7) เสมอ ถ้า a มีค่าน้อยและเข้าใกล้ 0 ค่าความเร็วเชิงมุมใน (13) ก็จะมีค่าใกล้ค่าใน (7) แต่นั่นหมายความว่าความเร่งเชิงมุมที่ใช้จะมีค่าน้อยเช่นกัน และ t_1 จากสมการ (12) จะมีค่ามาก ซึ่งอาจจะเป็นสิ่งที่ไม่ต้องการ ในทางกลับกัน ถ้าให้ความเร่งเชิงมุมมีค่าสูงโดยให้ค่า a เข้าใกล้ 1 ค่าความเร็วเชิงมุมสุดท้ายจาก (13) จะมีค่าเข้าใกล้ 0 ขึ้นเรื่อย ๆ และเวลา t_1 ก็จะเข้าใกล้ 0 เช่นกัน ในกรณีที่ $a = 1$ นั่นคือ การหมุนเริ่มต้นด้วยความเร่งเชิงมุมสูงสุดใน (6) จะพบว่า $t_1 = 0$ และวัตถุจะลื่นไถลทันทีที่การเคลื่อนที่เริ่มขึ้น

3.2 ความเร่งลดลงด้วยอัตราคงที่

กำหนดให้ความเร่งเชิงมุมเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นเริ่มต้นจากค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ใน (7) และลดลงจนเป็นศูนย์ด้วยอัตราคงที่ในรูป

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= c^2 - dt, \quad 0 < t < \frac{c^2}{d} \\ \ddot{\theta} &= 0, \quad \frac{c^2}{d} < t \end{aligned} \qquad (14)$$

ที่ขณะเวลา t ใดๆ ความเร็วเชิงมุมมีค่า

$$\dot{\theta} = \int_o^t (c^2 - dt)dt \quad = c^2 t - \frac{1}{2}dt^2 \qquad (15)$$

จาก (14) ความเร็วเชิงมุมสุดท้ายของการหมุนมีค่าเท่ากับความเร็วเชิงมุมเมื่อความเร่งเชิงมุมเท่ากับศูนย์ที่เวลา $t = \frac{c^2}{d}$ นั่นคือ

$$\dot{\theta}(t = \frac{c^2}{d}) = \frac{c^4}{2d} \qquad (16)$$

แทนค่า (14) และ (15) ใน (4) จะได้

$$(c^2 - dt)^2 + (c^2 t - \frac{1}{2}dt^2)^4 \le c^4 \qquad (17)$$

ซึ่งสามารถกระจายพจน์ได้เป็น

$$\begin{aligned} &c^4 - 2c^2 dt + d^2t^2 + c^8t^4 - 2c^6 dt^5 \\ &+ \frac{3}{2}c^4d^2t^6 - \frac{1}{2}c^2d^3t^7 + \frac{1}{16}d^4t^8 \le c^4 \end{aligned} \qquad (18)$$

เมื่อกำหนดค่า d เราสามารถใช้สมการ (18) ในการตรวจสอบได้ว่าการลื่นไถลจะเกิดขึ้นหรือไม่ และถ้าเกิดขึ้น จะเกิดขึ้นเมื่อใด

3.2.1 ความเร็วสุดท้ายเป็นความเร็วสูงสุดที่เป็นไปได้

หากกำหนดเพิ่มเติมให้ความเร็วเชิงมุมสุดท้ายของการเคลื่อนที่เมื่อความเร่งเชิงมุมลดลงจนเป็นศูนย์ใน

สมการ (16) มีค่าเท่ากับ ความเร็วเชิงมุมสูงสุดที่เป็นไปได้โดยวัตถุไม่ลื่นไถลในสมการ (7) เราสามารถหาค่า d ได้ คือ

$$d = \frac{c^3}{2} \tag{19}$$

ค่าความเร่งเชิงมุมใน (14) และความเร็วเชิงมุมใน (15) คือ

$$\ddot{\theta} = \frac{c^2}{2}(2 - ct), \quad 0 < t < \frac{2}{c} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= (c^2 t - \frac{c^3}{4} t^2) \\ &= \frac{c}{4}(4 - (2 - ct)^2), \;\; 0 < t < \frac{2}{c} \end{aligned} \tag{21}$$

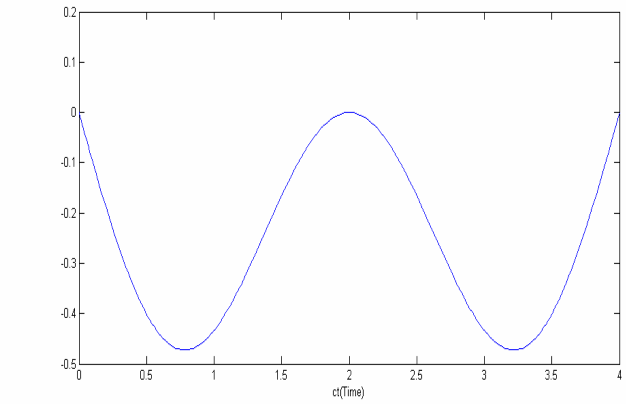
สมการ (17) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{c^4}{4}(2 - ct)^2 + \frac{c^4}{256}(4 - (2 - ct)^2)^4 \le c^4$$

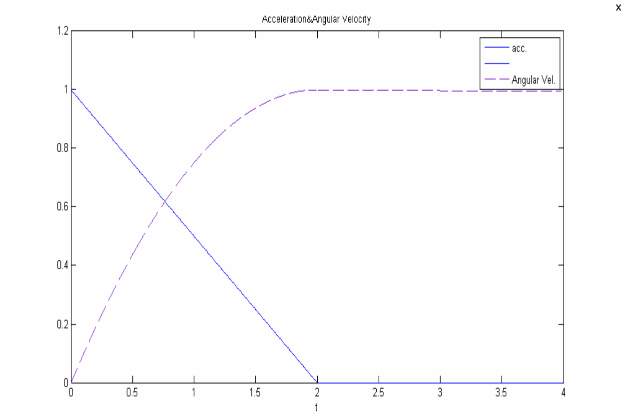
หรือ

$$(2 - ct)^2 + \frac{1}{64}(4 - (2 - ct)^2)^4 - 4 \le 0 \tag{22}$$

พจน์ทางซ้ายมือของสมการ (22) มีค่าเป็นศูนย์ที่ t = 0 และ t = 2/c จะสามารถแสดงได้ไม่ยากว่าที่เวลาใดๆ ระหว่าง 0 ถึง 2/c (หรือ 0 < ct < 2) พจน์ทางซ้ายมือของสมการ (22) จะมีค่าน้อยกว่าศูนย์เสมอ นั่นคือ สมการ (22) เป็นจริงและการลื่นไถลไม่เกิดขึ้น รูปที่ 1 แสดงค่าของพจน์ซ้ายมือของสมการ (22) โดยใช้ ct เป็นตัวแปรอิสระไม่มีหน่วย ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า ลักษณะการเคลื่อนที่ที่กำหนดให้ตามสมการ (20) และ (21) นี้สามารถทำให้จานระนาบหมุนจากสภาวะอยู่นิ่ง จนมีความเร็วสูงสุดที่เป็นไปได้โดยมวลสารไม่ลื่นไถลเลย เนื่องจากความเร่งเชิงมุมเป็นศูนย์หลังจาก t = 2/c จานระนาบจะหมุนด้วยความเร็วคงที่หลังจากนั้นโดยมวลสารไม่ลื่นไถล การเปลี่ยนแปลงค่าของความเร็วเชิงมุมที่ไม่มีหน่วย $\frac{\dot{\theta}}{c} = \frac{d\theta}{d(ct)}$ และความเร่งเชิงมุมที่ไม่มีหน่วย $\frac{\ddot{\theta}}{c^2} = \frac{d^2\theta}{d(ct)^2}$ เป็นฟังก์ชันของเวลาไม่มีหน่วย ct ได้แสดงไว้ในรูปที่ 2



รูปที่ 1 ค่าพจน์ทางซ้ายมือของสมการ (22) ซึ่งยืนยันการไม่ลื่นไถล



รูปที่ 2 ความเร่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุมของการเคลื่อนที่ตาม (20) และ (21)

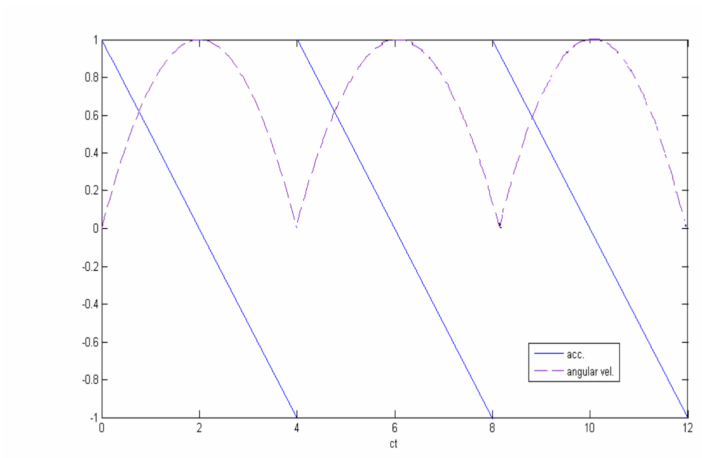
เป็นสิ่งที่น่าพิจารณาเพิ่มเติมว่า ถ้าไม่กำหนดให้ความเร่งเชิงมุมเป็นศูนย์หลังจากเวลา t = 2/c ค่าความเร็วเชิงมุมใน (21) ฟังชั่นสมมาตรกับค่า ct = 2 โดยมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ ct = 0 และ ct = 4 ในขณะเดียวกัน ข้อแม้ของการไม่ลื่นไถลใน (22) ก็เป็นฟังก์ชั่นสมมาตรกับค่า ct = 2 ทำให้สมการ (22) เป็นจริงระหว่างเวลา 2/c ถึง 4/c (หรือ 2 < ct < 4) ด้วย ดังได้แสดงไว้ในรูปที่ 1 ดังนั้น ถ้ากำหนดให้

$$\ddot{\theta} = \frac{c^2}{2}(2 - ct), \qquad 0 < t < 4/c \tag{23}$$

ทำให้

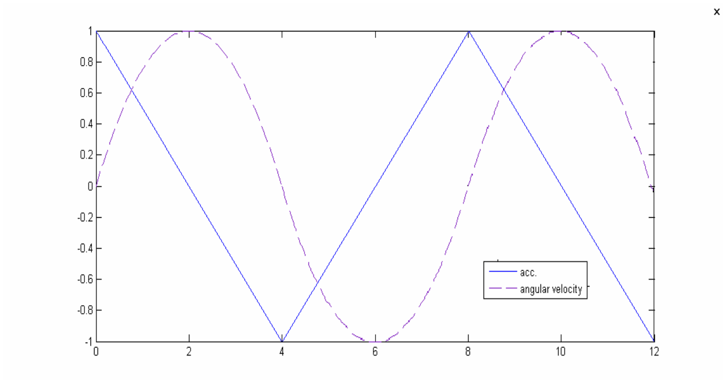
$$\dot{\theta} = (c^2 t - \frac{c^3}{4} t^2), \qquad 0 < t < 4/c \tag{24}$$

จานระนาบจะเริ่มเคลื่อนที่จากสภาวะอยู่นิ่งและหมุนเร็วขึ้นเรื่อย ๆ จนมีความเร็วสูงสุดเท่ากับ c ที่เวลา t = 2/c (ct = 2) และหลังจากนั้นจะเริ่มหมุนช้าลงจนความเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์อีกครั้งที่เวลา t = 4/c (ct =4) ถ้าใส่ความเร่งเชิงมุมในลักษณะใน (23) อีกครั้ง จานระนาบก็จะหมุนในลักษณะเดิมอีก นั่นคือ จานระนาบจะสามารถหมุนในลักษณะวัฏจักรโดยเริ่มจากสภาวะอยู่นิ่ง หมุนเร็วขึ้นจนมีความเร็วสูงสุดที่เป็นไปได้โดยวัตถุไม่ลื่นไถล หมุนช้าลงจนความเร็วเป็นศูนย์ และเริ่มทำเช่นนี้ซ้ำอีกไปเรื่อย ๆ โดยที่วัตถุจะไม่ลื่นไถลตลอดการเคลื่อนที่ ความเร่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุมของการหมุนในลักษณะนี้ได้แสดงไว้ในรูปที่ 3



รูปที่ 3 ความเร่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุมของการเคลื่อนที่เป็นวัฏจักร

จากสมการ (23) และ (24) จะเห็นได้ว่า ถ้าหากเพิ่มเครื่องหมายลบให้พจน์ทางขวามือของทั้งสองสมการ การเคลื่อนที่ก็จะเป็นเช่นเดิมในทิศทางตรงกันข้าม นั่นคือ จานระนาบจะเคลื่อนที่เร็วขึ้นจนมีความเร็วสูงสุดที่สามารถเป็นไปได้ และช้าลงจนความเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์อีกครั้งโดยวัตถุไม่ลื่นไถลตลอดการเคลื่อนที่ ดังนั้น การเคลื่อนที่เป็นวัฏจักรอีกรูปแบบหนึ่งที่สามารถเป็นไปได้คือเริ่มจาก (23) และ (24) แล้วตามด้วยการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นลบของ (23) และ (24) ดังแสดงในรูปที่ 4 ในกรณีนี้ ความเร่งเชิงมุมจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเสมอ



รูปที่ 4 ความเร่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุมของการเคลื่อนที่เป็นวัฏจักรที่ความเร่งเชิงมุมเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

3.2.2 อัตราการลดความเร่งสูงกว่าสมการ (19)

อัตราการลดลงของความเร่งอาจจะกำหนดให้แตกต่างจากค่าในสมการ (19) ได้ กรณีแรกที่จะพิจารณาคือกรณีที่ความเร่งลดลงเร็วกว่าค่าใน (19) โดยกำหนดให้

$$d=\gamma\frac{c^3}{2}, \qquad \gamma>1 \tag{25}$$

ความเร็วเชิงมุมเมื่อความเร่งเชิงมุมเป็นศูนย์คือค่าความเร็วเชิงมุมสูงสุดที่เวลา $t_3=\frac{c^2}{d}$ คือ

$$\dot{\theta}(t_3=\frac{c^2}{d}=\frac{2}{\gamma c})=\frac{c}{\gamma} \tag{26}$$

เนื่องจาก $\gamma > 1$ ความเร็วเชิงมุมสุดท้ายในกรณีนี้จะต้องน้อยกว่าค่าความเร็วเชิงมุมสูงสุดจากที่เป็นไปได้ในสมการ (6) เนื่องจากความเร่งเชิงมุมลดลงด้วยอัตราที่เร็วกว่า (19) ขนาดของความเร่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุมที่เกิดขึ้นจะน้อยกว่าในกรณีของหัวข้อ 3.2.1ตลอดเวลา ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าในกรณีนี้วัตถุจะไม่เกิดการลื่นไถลตลอดการเคลื่อนที่และความเร็วเชิงมุมค่าสุดท้ายจะน้อยกว่าความเร็วเชิงมุมสูงสุดที่เป็นไปได้

3.2.3 อัตราความเร่งน้อยกว่าสมการ (19)

ถ้าหากอัตราการลดของความเร่งน้อยกว่าที่กำหนดในสมการ (19) นั่นคือ

$$d=\beta\frac{c^3}{2}, \qquad \beta<1 \tag{27}$$

จากสมการ (15) ความเร็วเชิงมุมคือ

$$\dot{\theta} = c^2 t - \beta \frac{c^3}{4} t^2 \qquad (28)$$

วัตถุจะลื่นไถลก่อนที่ความเร่งเชิงมุมจะลดลงถึงศูนย์ ดังจะเห็นได้ว่าที่ $t = \frac{c^2}{d} = \frac{2}{\beta c}$ คือเวลาที่ความเร่งเชิงมุมลดลงเป็นศูนย์ จากการแทนค่าในสมการ (16) พบว่า

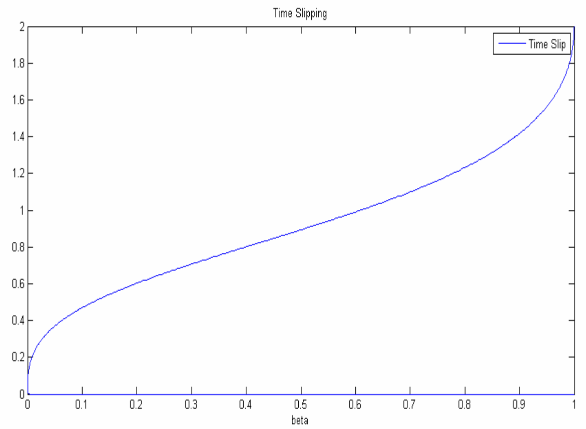
$$\dot{\theta}(t = \frac{2}{\beta c}) = \frac{c}{\beta} > c \qquad (29)$$

เนื่องจากความเร็วเชิงมุมใน (29) มีค่ามากกว่าความเร็วเชิงมุมสูงสุดที่เป็นไปได้ในสมการ (7) แสดงว่าวัตถุต้องเกิดการลื่นไถลก่อนหน้านั้น

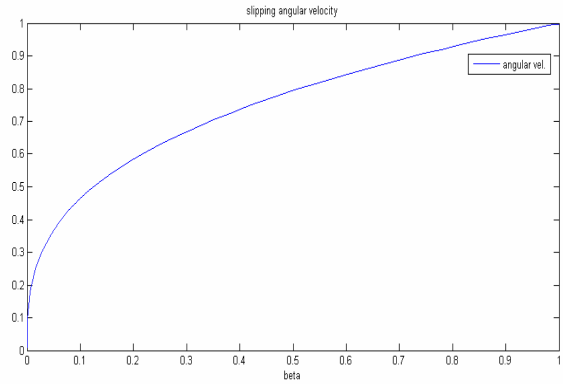
ให้ t = T_4 เป็นเวลาที่การลื่นไถลเกิดขึ้น จากสมการ (17) เวลา T_4 สามารถหาได้จาก

$$(1 - \frac{\beta}{2} c T_4)^2 + (ct - \frac{\beta}{4} c^2 T_4{}^2)^4 = 1 \qquad (30)$$

ค่า T_4 จะขึ้นกับค่า β ที่กำหนด รูปที่ 5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง cT_4 และ β ตลอดจนค่าความเร็วเชิงมุมไม่มีหน่วยสุดท้าย ($\frac{\dot{\theta}}{c} = \frac{d\theta}{d(ct)}$) เมื่อการลื่นไถลเกิดขึ้น จะเห็นได้ว่าความเร็วเชิงมุม $\dot{\theta}/c$ ที่ได้มีค่าน้อยกว่า 1 เสมอ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าวัตถุจะเกิดการลื่นไถลก่อนที่ความเร็วเชิงมุมจะถึงค่าความเร็วเชิงมุมสูงสุด



รูปที่ 5 เวลาขณะที่วัตถุเริ่มลื่นไถล



รูปที่ 6 ความเร็วเชิงมุมขณะที่วัตถุเริ่มไถล

4. สมการเชิงอนุพันธ์ในกรณีความเร่งรวมมีค่าสูงสุดเสมอและผลเฉลย

พิจารณากรณีที่ขนาดของความเร่งรวมเท่ากับความเร่งสูงสุดตามเงื่อนไขของการไม่ลื่นไถล จากสมการ (4) คือ

$$(\ddot{\theta})^2 + (\dot{\theta})^4 = c^4 \qquad (31)$$

เพื่อความสะดวก กำหนดให้ $\bar{t} = ct$ เป็นเวลาที่ไร้หน่วย ดังนั้นสมการ (32) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\left(\frac{d^2\theta}{d\bar{t}^2}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{d\bar{t}}\right)^4 = 1 \qquad (32)$$

หาอนุพันธ์ของสมการที่(33) เทียบกับ $\bar{t}$ จะได้

$$2\left(\frac{d^2\theta}{d\bar{t}^2}\right)\frac{d^3\theta}{d\bar{t}^3} + 4\left(\frac{d\theta}{d\bar{t}}\right)^3 \frac{d^2\theta}{d\bar{t}^2} = 0 \qquad (33)$$

เนื่องจาก $\frac{d^2\theta}{d\bar{t}^2}$ ไม่เป็นศูนย์ตลอดเวลา ดังนั้นเราสามารถจัดรูปสมการนี้ได้เป็น

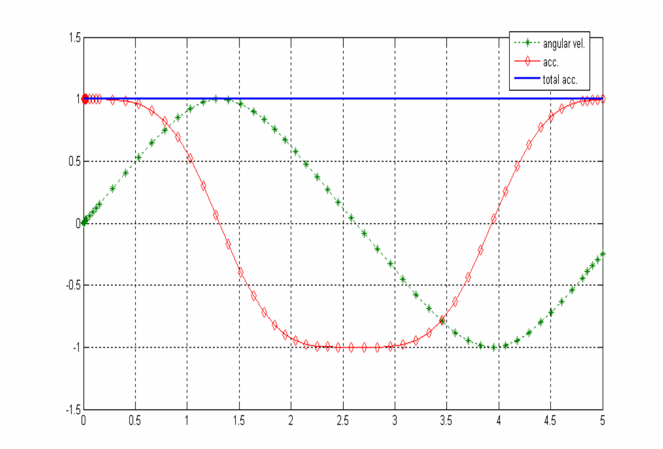
$$\left(\frac{d^3\theta}{d\bar{t}^3}\right) + 2\left(\frac{d\theta}{d\bar{t}}\right)^3 = 0 \qquad (34)$$

สมการ (34) เป็นสมการอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่โดยที่ความเร่งรวมมีค่าสูงสุดตลอดเวลา ถ้าหากการเคลื่อนที่เริ่มต้นจากสภาวะอยู่นิ่งด้วยความเร่งเชิงมุมสูงสุดตาม (6) เงื่อนไขเริ่มต้นของสมการอนุพันธ์คือ

$$\begin{aligned} &\theta(\bar{t} = 0) = 0 \\ &\frac{d\theta}{d\bar{t}}(\bar{t} = 0) = 0 \\ &\frac{d^2\theta}{d\bar{t}^2}(\bar{t} = 0) = 1 \end{aligned} \qquad (35)$$

สมการอนุพันธ์ (34) เป็นสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นที่จะต้องแก้โดยใช้วิธีการทางตัวเลขในการหาผลเฉลย เราสามารถใช้โปรแกรม MATLAB ในการหาผลเฉลยได้โดยง่าย ชุดคำสั่งในการหาผลเฉลยได้แสดงไว้ในภาคผนวก ส่วนผลเฉลยได้แสดงไว้ในรูปที่ 6 จากผลเฉลย เราพบว่าหากเราใส่แรงบิดให้เกิดความเร่งเชิงมุมตามผลเฉลย การเคลื่อนที่จะใช้เวลา ct ประมาณ 1.3 เพื่อให้มีความเร็วเชิงมุมสูงสุดและความเร่งเชิงมุมเป็นศูนย์ เวลาที่ได้นี้ควรจะเป็นเวลาที่สั้นที่สุดที่จะทำให้จานระนาบหมุนจากสภาพอยู่นิ่งจนมีความเร็วเชิงมุมสูงสุด หลังจากเวลานี้ จะสามารถกำหนดให้ความเร่งเชิงมุมเป็นศูนย์ ซึ่งจะทำให้ความเร็วเชิงมุมมีค่าคงที่ไปเรื่อย ๆ

ในรูปที่ 7 การแสดงผลเฉลยได้แสดงผลเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เนื่องจากความเร่งรวมเท่ากับความเร่งสูงสุดเสมอ วัตถุจะไม่ลื่นไถลตลอดเวลาของการเคลื่อนที่ และจะเห็นได้ว่าการหมุนจะมีลักษณะเป็นวัฏจักร นั่นคือ จานระนาบจะเริ่มต้นจากสภาวะอยู่นิ่งและหมุนเร็วขึ้นเรื่อย ๆ จนมีความเร็วสูงสุด หลังจากนั้นจะหมุนช้าลงจนความเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์(หรือจานระนาบอยู่นิ่ง)อีกครั้งหนึ่ง จากนั้นจะเริ่มหมุนในทิศทางตรงกันข้ามกับการหมุนครั้งแรก (ความเร็วเชิงมุมเป็นลบ) จนมีความเร็วเชิงมุมสูงสุด แล้วช้าลงจนความเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์ ซ้ำๆ อยู่อย่างนี้ไปเรื่อย ๆ



รูปที่ 7 กราฟผลเฉลยของกรณีความเร่งรวมมีค่าสูงสุด

5. บทสรุป

จากการพิจารณารูปแบบต่าง ๆ ของการหมุนของจานระนาบที่มีวัตถุวางอยู่ข้างบนจากสภาวะอยู่นิ่ง ซึ่งมีเป้าหมายว่าจะให้การหมุนมีค่าความเร็วเชิงมุมสูงสุดที่เป็นไปได้ โดยไม่มีการลื่นไถลของวัตถุตลอดการเคลื่อนที่ ได้แสดงให้เห็นว่าการเคลื่อนที่แบบความเร่งคงที่จะไม่สามารถนำไปสู่ความเร็วเชิงมุมที่มีค่าสูงสุดได้เพราะการลื่นไถลจะเกิดขึ้นก่อนนั้นเสมอ จากนั้นพบว่าความเร่งเชิงมุมที่เป็นไปได้คือความเร่งเชิงมุมที่เริ่มต้นจากค่าสูงสุดและลดลงด้วยอัตราคงที่ โดยที่ความเร็วเชิงมุมสุดท้ายเมื่อความเร่งเชิงมุมเป็นศูนย์มีค่าเท่ากับความเร็วเชิงมุมสูงสุด นอกจากนี้ เราสามารถหาสมการอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ในกรณีที่ความเร่งรวมมีค่าสูงสุดตลอดเวลา ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์นี้สามารถหาได้โดยวิธีเชิงตัวเลข การให้ความเร่งเชิงมุมตามผลเฉลยของสมการอนุพันธ์น่าจะทำให้จานระนาบไปถึงความเร็วเชิงมุมสูงสุดได้ในเวลาที่สั้นที่สุด นอกจากนี้ การเคลื่อนที่ในลักษณะวัฏจักรที่จานระนาบเริ่มจากสภาวะอยู่นิ่งจนมีความเร็วเชิงมุมสูงสุดและลดลงจนเป็นศูนย์อีกครั้งและเริ่มต้นหมุนใหม่เป็นวัฏจักรสามารถเป็นไปได้ การเคลื่อนที่เป็นวัฏจักรนี้สามารถเกิดขึ้นทั้งในกรณีที่ความเร่งลดลงด้วยอัตราคงที่และความเร่งเป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ที่พบ ผลที่ได้จากการศึกษานี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่ต้องการออกแบบการเคลื่อนที่แบบหมุนของจานหรือโต๊ะที่ไม่ต้องการให้วัตถุที่วางอยู่ด้านบนเกิดการลื่นไถล

6. เอกสารอ้างอิง

[1] Hibbeler, R.C. (2006). *Engineering Mechanics: Statics and Dynamics*, Pearson, Canada.

[2] Meriam, J.L. and Kraige, L.G. (2007). *Engineering Mechanics: Dynamics, 6th edition*, John Wiley and Sons, New York.

[3] Beer, F.P. and Johnston, E.R. (2007). *Vector Mechanics for Engineers, 4th edition*, McGraw Hill, Singapore.

ภาคผนวก

ชุดคำสั่งในโปรแกรม MATLAB สำหรับกรณีความเร่งรวมมีค่าสูงสุดเสมอ

```
function pdot = dynamic(t,p)
pdot = zeros(size(p));
pdot(1) = p(2);
pdot(2) = p(3);
pdot(3) = -2*(p(2))^3;
p0 = [0 0 1];
[t,p] = ode45('dynamic',[0 5],p0);
plot(t,p)
```