

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากโครงสร้างระดับโมเลกุลของยางคงรูปขณะรับแรงดึง

A mathematical model based on molecular structure of vulcanized rubber under tensile tests

นายเชาวลัทธิ เถาหมอ* และ ดร.รัชดา โสภาคะยัง

วิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี ตำบลเมืองศรีโค อำเภวารินชำราบ จังหวัดอุบลราชธานี 34190

*ติดต่อ: E-mail chaowalukt@pwa.co.th, เบอร์โทรศัพท์ 088-5806484

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากโครงสร้างระดับโมเลกุลของยางคงรูปขณะรับแรงดึง โดยมีสมมุติฐานว่ายางคงรูปประกอบด้วยโซ่โมเลกุล 2 แบบ คือ แบบพันธะทางกายภาพและแบบพันธะเคมี ซึ่งในช่วงเริ่มต้นของการรับแรงดึงโซ่โมเลกุลแบบพันธะทางกายภาพจะมีบทบาทสำคัญในการรับแรงทั้งหมด เมื่อเข้าสู่ช่วงครากโซ่โมเลกุลแบบพันธะทางกายภาพจะค่อยๆ หลุดขาด จึงส่งผลให้ค่าโมดูลัสของยางมีค่าลดลงและเมื่อเข้าสู่ช่วงฮาร์ดเดนนิง โซ่โมเลกุลแบบพันธะเคมีจะมีบทบาทสำคัญในการรับแรงจึงส่งผลให้ค่าโมดูลัสของยางมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งค่าตัวแปรในสมการทางคณิตศาสตร์ของโมเดลหาได้จากจากระเบียบวิธีการประมาณค่าที่สมมูลกันของโมเดลกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง โดยโมเดลนี้สามารถแสดงพฤติกรรมเชิงกลของยางคงรูปได้ดีในทุกช่วงความเครียดขณะรับแรงดึง

คำหลัก: แบบจำลองทางคณิตศาสตร์, การยืดหยุ่นแบบไม่เชิงเส้น, ไฮเปอร์อีลาสติก, ยางคงรูป

Abstract

The aim of this research is to formulate a mathematical model based on molecular structure of vulcanized rubber under tensile tests. In general, the linkage of polymer chains in rubber can be classified as two different linkages: physical links and chemical links. In the first region of the tensile behavior, all physical links are assumed to be active before they gradually fail. In the yield region, the physical links are still failing while the chemical links are assumed to gradually become active. In the hardening region, only chemical linkage is assumed to play an important role on the tensile behavior, so the chemical links are progressively active in this region. In conclusion, the parameters in model are determined by curve fitting the model with the experimental data. It can be shown that the model can characterize the tensile behavior of vulcanized rubber very well in every region.

Keywords: Mathematical model, tensile non-linear, Hyperelasticity, Vulcanized Rubber.

1. บทนำ

ปัจจุบันการแข่งขันทางด้านธุรกิจอุตสาหกรรมเพิ่มสูงขึ้น การพัฒนาวัสดุวิศวกรรมเพื่อให้ได้วัสดุที่เหมาะสมและคุ้มค่าต่อการใช้งานก็เป็นส่วนสำคัญที่จะ

ทำให้อุตสาหกรรมสามารถพัฒนาสูงขึ้น วัสดุที่มีความสำคัญต่องานทางด้านวิศวกรรมประเภทหนึ่ง คือ ยางคงรูป การผลิตยางคงรูปเพื่อให้มีคุณสมบัติเชิงกลที่เหมาะสมต่อการใช้งานทางวิศวกรรมนั้นต้อง

สิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายและเวลาในการลองผิดลองถูกสูงมาก เนื่องจากยางพาราในปัจจุบันมีราคาแพง แต่ถ้าเราสามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สามารถอธิบายและคาดคะเนพฤติกรรมกรรมการรับภาระแรงของยางได้ จะเป็นการลดค่าใช้จ่ายในการลองผิดลองถูกเพื่อผลิตผลิตภัณฑ์ยางได้ อีกทั้งยังสามารถพัฒนาผลิตภัณฑ์ยางให้มีคุณสมบัติเชิงกลให้ดีขึ้นได้อีกด้วย

จากงานวิจัยที่ผ่านมาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายพฤติกรรมเชิงกลของยางคงรูปเป็นแบบจำลองที่อธิบายพฤติกรรมเชิงกลของยาง (Phenomenological Model) ซึ่งตัวแปรภายในแบบจำลองไม่มีความหมายทางกายภาพที่สัมพันธ์กับโครงสร้างภายในของยาง เช่น แบบจำลองอ็อกเดน (Ogden Model) และมูลนีร์ฟลิน (Mooney-Rivlin Model) เป็นต้น [6] ในงานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นที่จะสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งตัวแปรภายในแบบจำลองมีความสัมพันธ์กับลักษณะทางกายภาพของโครงสร้างภายในยาง (Structural Model) ที่สามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของโครงสร้างภายในที่สำคัญของยางคงรูปขณะรับแรงดึงได้ โดยใช้แนวคิดจากงานวิจัยเรื่อง Elastic and viscoelastic properties of a type I collagen fiber [3] ซึ่งเป็นการจำลองการเปลี่ยนแปลงกายภาพของโครงสร้างภายในของวัสดุขณะรับแรงแบบคลายความเค้น (Relaxation) เพื่ออธิบายคุณสมบัติวิสโคอีลาสติกและอีลาสติกของคอลลาเจนไฟเบอร์

2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

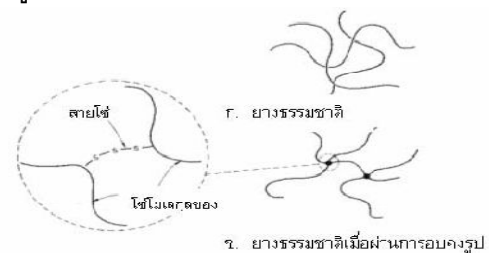
จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่ายางก่อนผ่านการอบคงรูป จะแสดงพฤติกรรมเชิงกลเหมือนกับวัสดุวิสโคอีลาสติก ในขณะที่ยางหลังอบคงรูปจะแสดงความเป็นวิสโคอีลาสติกน้อยลง จนบางครั้งในงานวิจัยหลายๆงานได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยสมมุติให้ยางคงรูปมีคุณสมบัติทางกลแบบไฮเปอร์อีลาสติก

2.1 โครงสร้างและส่วนผสมสารเคมีที่มีผลต่อสมบัติของยางคงรูป

เนื่องจากยางดิบ (Natural Rubber) ที่เราได้อาจมาจากยางพารามีสมบัติไม่เหมาะสมที่จะนำไปใช้งาน โดยตรง จึงจำเป็นต้องมีกระบวนการปรับปรุงคุณสมบัติโดยการผสมยางดิบกับสารเคมีต่างๆ เพื่อให้ยางมีคุณสมบัติที่เหมาะสมกับการใช้งานต่างๆ ตามที่ต้องการ สารตัวเติม (Filler) เป็นสารที่ใช้ผสมกับยางดิบเพื่อช่วยเสริมแรง (Reinforcement) เช่น เพิ่มความต้านทานแรงดึง เพิ่มความทนต่อการสึกกร่อน ดังนั้นโครงสร้างทางเคมีจึงมีบทบาทต่อความแข็งแรงและความยืดหยุ่นของยางคงรูป ดังนี้

2.1.1 การทำให้ยางคงรูป (Vulcanization)

กระบวนการทำให้ยางคงรูปโดยใช้กำมะถันเติมลงไป ในยางดิบนั้น กำมะถันจะทำหน้าที่เป็นตัวยึดจับระหว่างห่วงโซ่โมเลกุลของยางและการเติมกำมะถันเป็นกระบวนการหลังจากการบดผสมยางกับสารเคมีก่อนนำยางไปอบคงรูป กำมะถันจะส่งผลให้ห่วงโซ่โมเลกุลของยางเกิดจุดเชื่อมต่อ ทำให้ยางมีความแข็งแรงขึ้น ทนทานต่อความร้อนและการสึกกร่อน ซึ่งการจับยึดโซ่โมเลกุลอธิบายได้ดังรูปที่ 1 กำมะถันจะใช้ร่วมกับสารตัวกระตุ้น (Activator) และสารตัวเร่ง (Accelerator) ตัวกระตุ้นที่ใช้ทั่วไปคือ ซิงค์ออกไซด์ และกรดสเตียริก ซึ่งทำหน้าที่เพิ่มจำนวนพันธะเคมีทำให้ยางมีความแข็งแรงขึ้น สารตัวเร่งจะช่วยเพิ่มอัตราความเร็วและประสิทธิภาพของปฏิกิริยากระบวนการยางคงรูป [5]

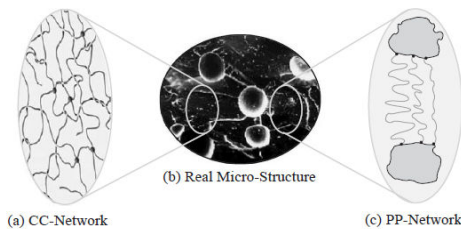


รูปที่ 1 การจับยึดของโซ่โมเลกุลกับอะตอมของกำมะถัน [5]

2.1.2 การเสริมแรงโดยการเติมผงคาร์บอนดำ

การเติมผงคาร์บอนดำระหว่างกระบวนการบดผสมยางนั้นจะมีผลทำให้ยางนั้นมีความแข็งแรงมากขึ้นและยังเป็นการเติมสีให้กับยางเราแบ่งผงคาร์บอนดำออกเป็น 3 ประเภทดังนี้ แลมป์ (Lamp) เป็นผง

คาร์บอนดำทำให้ยางมีสี ชาร์เนล (Channel) เป็นผงดคาร์บอนดำทำให้ยางขยายตัวมากขึ้นและเสริมแรงได้บ้าง เฟอร์แนส (Furnace) เป็นผงดคาร์บอนดำทำให้ยางเสริมแรงได้มากที่สุด ผงดคาร์บอนดำยังเป็นสารที่เติมเข้าไปให้แทรกตัวระหว่างโซโมเลกุลของโครงข่ายโพลิเมอร์ โดยอะตอมเดี่ยวของคาร์บอนที่เติมเข้าไปจะอยู่ในช่องว่างของโครงข่ายทำให้คุณสมบัติของยางเปลี่ยนไป สิ่งแรกที่สังเกตเห็นได้คือความแข็งของยาง และเวลาการอบคงรูปปัจจัยสำคัญในการเสริมแรงของผงดคาร์บอนดำ คือ การเกาะกันของอนุภาคผงดคาร์บอนดำ และขนาดของผงดคาร์บอนดำ ผงดคาร์บอนดำที่มีอนุภาคเกาะกันแน่นมากจะทำให้ยางเพิ่มการต้านทานต่อการขยายตัวของรอยฉีกขาดและเพิ่มความต้านทานการล้าตัว [5]



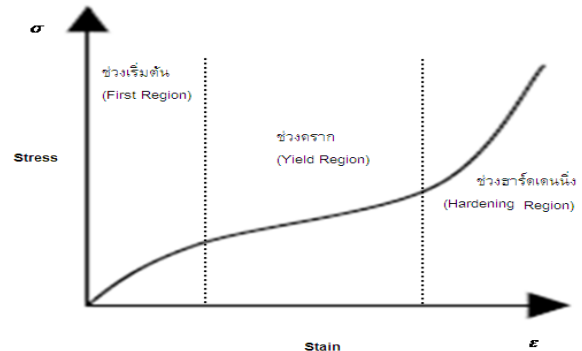
รูปที่ 2 ภาพถ่าย SEM (Scanning Electron Microscope) ของยางเติมคาร์บอนดำ 20 phr [1]

2.2 สมบัติไฮเปอร์อีลาสติกขณะรับแรงดึง (Hyperelastic Properties)

พฤติกรรมของยางคงรูปขณะรับแรงดึงนั้น ความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นเมื่อได้รับภาระจะมีความสัมพันธ์ในลักษณะไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinearity Relation) ซึ่งแตกต่างจากวัสดุประเภทโลหะทั่วไป กรรมวิธีการผลิตยางคงรูปมีการเติมส่วนประกอบสารเคมีเข้าไปเพื่อให้คุณสมบัติมีความทนทานมากขึ้น พฤติกรรมของยางจึงเปลี่ยนไปตามสารประกอบที่เติมเข้าไป

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาอย่างทั่วกระบวนทำให้ยางคงรูป (Vulcanization) ซึ่งจะมีผลทำให้คุณสมบัติต่างๆ ของยางเปลี่ยนไป ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของยางและการยึดตัวจะไม่เป็นสัดส่วนโดยตรงกับภาระที่ได้รับ เรียกว่า พฤติกรรมแบบไม่เป็นเชิงเส้น

(Nonlinear Behavior) ซึ่งเราสามารถแบ่งลักษณะการแสดงพฤติกรรมเชิงกลของยางขณะรับแรงดึงได้เป็น 3 ช่วง คือ ช่วงเริ่มต้น (First region) ช่วงคราก (Yield region) และช่วงฮาร์ดเดนนิ่ง (Hardening region) ดังแสดงในรูปที่ 3



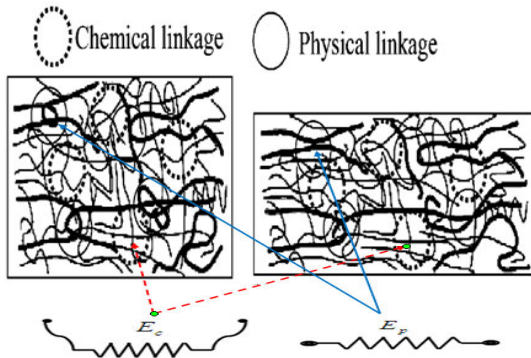
รูปที่ 3 พฤติกรรมแบบไม่เป็นเชิงเส้นของยาง

3. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษาส่วนประกอบสำคัญของโครงสร้างภายในของยางคงรูป คือ โซโมเลกุลของยางซึ่งมีการเชื่อมต่อกันด้วยพันธะเคมีเป็นโครงร่างตาข่าย (Cross links) โดยการเชื่อมต่อกันของโซโมเลกุลนี้สามารถแบ่งออกได้เป็น การเชื่อมต่อกันทางกายภาพ (Physical linkage) และพันธะเคมี (Chemical linkage) [4] ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ภายใต้สมมุติฐานที่ว่า ในช่วงเริ่มต้นของพฤติกรรมการรับแรงดึงนั้น ทั้งห่วงโซโมเลกุลที่เชื่อมต่อกันทางกายภาพทั้งหมดและพันธะเคมีบางส่วนมีบทบาทสำคัญในการรับแรง เมื่อเข้าสู่ช่วงครากห่วงโซโมเลกุลที่เชื่อมต่อกันทางกายภาพจะเริ่มหลุดออกจากกัน จึงส่งผลให้ค่าโมดูลัสของยางมีค่าลดลง และเมื่อเข้าสู่ช่วงฮาร์ดเดนนิ่งห่วงโซโมเลกุลที่เชื่อมต่อกันทางพันธะเคมีในส่วนที่ยังไม่รับแรงจะเริ่มรับแรงจึงส่งผลให้ค่าโมดูลัสของยางมีค่าเพิ่มขึ้น

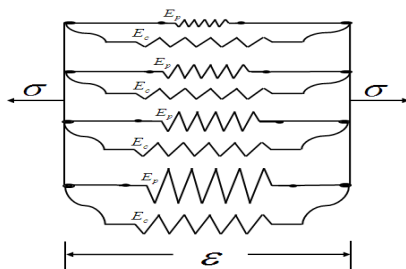
งานวิจัยนี้จึงได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยเลียนแบบพฤติกรรมเปลี่ยนแปลงการเชื่อมต่อของทั้ง 2 แบบ ขณะรับแรงดึง ดังแสดงในรูปที่ 4 โดยการเชื่อมต่อกันทางกายภาพแทนด้วยหน่วยสปริง (Spring unit) ที่ต่อกันแบบขนานหลาย ๆ เส้นเหมือนโซโมเลกุลในโครงสร้างภายในยางคงรูป ซึ่งพฤติกรรม

การรับภาระแรงของสปริงแบบกายภาพนี้ จะรับแรงทั้งหมดขณะเริ่มดึงและค่อย ๆ หลุดขาดออกจากกัน โดยใช้ทฤษฎีความเสียหายทางสถิติ และฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability density function) ของการหลุดขาดเป็นการแจกแจงความถี่แบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Distribution) ส่วนการเชื่อมต่อกันแบบทางพันธะเคมี แทนด้วยสปริงหลาย ๆ ตัวเหมือนโซ่โมเลกุลในโครงสร้างภายในยางคงรูปเช่นกัน แต่สปริงแบบพันธะเคมีนั้นจะมีพฤติกรรมการรับภาระแรงแตกต่างจากแบบทางกายภาพโดยสิ้นเชิง คือ สปริงแบบทางพันธะเคมีจะค่อย ๆ รับแรงและจะไม่ขาดออกจากกัน เราจะให้พฤติกรรมการค่อย ๆ รับแรงของกลุ่มสปริงนี้โดยใช้การแจกแจงความถี่ทางสถิติแบบไวบูล (Weibull Distribution)



รูปที่ 4 การออกแบบแบบจำลองโดยเลียนแบบการเชื่อมต่อกันภายในยางคงรูป [4]

จากการใช้สมมุติฐานดังกล่าว สามารถสร้างแผนภาพแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยเลียนแบบพฤติกรรมการรับภาระแรงของลักษณะการเชื่อมต่อกันทั้งสองแบบของยางคงรูปขณะรับแรงดึงได้ดังแสดงในรูปที่ 5



รูปที่ 5 แผนภาพแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของยางคงรูปขณะรับแรงดึง

จากแผนภาพแบบจำลองนี้จะเห็นว่าสปริงของทั้ง 2 กลุ่มพันธะต่อกันแบบขนาน ทำให้ค่าความเครียดเท่ากันดังนี้

$$\epsilon = \epsilon_p = \epsilon_c \quad (3-1)$$

โดย

ϵ คือ ความเครียดทั้งหมดของยางคงรูป

ϵ_p คือ ความเครียดของการเชื่อมต่อแบบทางกายภาพ

ϵ_c คือ ความเครียดของการเชื่อมต่อแบบพันธะเคมี

ความเค้นทั้งหมดจะเท่ากับค่าความเค้นรวมทั้งหมดของสปริงทั้ง 2 กลุ่มพันธะรวมกัน ดังนี้

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_c \quad (3-2)$$

โดย

σ คือ ความเค้นรวมทั้งหมดในยางคงรูป

σ_p คือ ความเค้นรวมทั้งหมดที่เกิดจากการเชื่อมกันแบบทางกายภาพ

σ_c คือ ความเค้นรวมทั้งหมดที่เกิดจากการเชื่อมกันแบบพันธะเคมี

ความเค้นภายในการเชื่อมต่อแบบทางกายภาพที่ประกอบด้วยโซ่โมเลกุลหลายเส้นพันกันซึ่งแทนด้วยสปริงหลาย ๆ ตัวเชื่อมต่อกันแบบขนานนั้นเริ่มรับแรง (Active) พร้อมกันทั้งหมดทันทีที่ยางเริ่มรับแรงดึงแล้วจึงค่อย ๆ หลุดขาดออกจากกัน ตามฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Distribution) โดยสามารถเขียนสมการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดได้ดังนี้

$$\sigma_p = E_p \epsilon_p \left[\int_0^\infty p(\epsilon) d\epsilon - \int_0^{\epsilon_p} p(\epsilon_b) d\epsilon_b \right] \quad (3-3)$$

$$\sigma_p = E_p \epsilon \left[\int_0^\infty p(\epsilon) d\epsilon - \int_0^{\frac{\epsilon}{E_p}} p(\epsilon_b) d\epsilon_b \right] \quad (3-4)$$

โดย

E_p คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของพันธะกายภาพ

ε_b คือ ความเครียดที่การเชื่อมตอกันทางกายภาพหลุดขาดออกจากกัน

การแจกแจงความถี่ของการขาดออกของโซ่โมเลกุลแบบทางกายภาพเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Distribution) สามารถเขียนได้ดังสมการที่ (3-5)

$$p(\varepsilon_b) = \phi e^{-\phi \varepsilon_b} \quad (3-5)$$

โดยที่ $\phi > 0$ เมื่อ ϕ คือ ค่าแสดงความเร็วในการหลุดขาด

จากสมการที่ (3-4) และ (3-5) สามารถหาผลเฉลยของสมการที่ (3-4) โดยการอินทิเกรตได้ดังนี้

$$\sigma_p = E_p \varepsilon \left[\int_0^\varepsilon p(\varepsilon) d\varepsilon - \int_0^{\varepsilon_b} p(\varepsilon_b) d\varepsilon_b \right]$$

$$\sigma_p = E_p \varepsilon \left[\int_0^\varepsilon \phi e^{-\phi \varepsilon} d\varepsilon - \int_0^{\varepsilon_b} \phi e^{-\phi \varepsilon_b} d\varepsilon_b \right]$$

$$\sigma_p = E_p \varepsilon [1 - (1 - e^{-\phi \varepsilon})] \quad (3-6)$$

ส่วนพันธะเคมีจะค่อยๆ รับแรง (Active) ตามฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น (Probability density function) แบบไวบูล (Weibull Distribution) และไม่ขาดออกจากกัน สามารถเขียนสมการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดได้ดังนี้

$$\sigma_c = \int_0^\varepsilon E_c (\varepsilon - \varepsilon_c) p(\varepsilon_c) d\varepsilon_c \quad (3-7)$$

โดย

E_c คือ ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของพันธะเคมี

กำหนดให้ $p(\varepsilon_c)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น (Probability density function) ของการเริ่มรับแรง (Active) ของพันธะเคมีที่ $\varepsilon_c \geq \varepsilon$ โดยใช้การแจกแจงความถี่ แบบไวบูล (Weibull Distribution)

$$p(\varepsilon_c) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\varepsilon_c}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\varepsilon_c}{\beta} \right)^\alpha} \quad (3-8)$$

เมื่อ α คือ ค่า Shape parameter โดย $\alpha > 0$

β คือ ค่า Scale parameter โดย $\beta > 0$

จากสมการที่ (3-7) และ (3-8) สามารถหาผลเฉลยของสมการที่ (3-7) ได้ดังนี้

$$\sigma_c = E_c \left(\varepsilon - \frac{\beta}{\alpha} \gamma \left(\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{\varepsilon(t)}{\beta} \right)^\alpha \right) \right) \quad (3-9)$$

[2]

$$\text{โดย } \gamma \left(\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{\varepsilon}{\beta} \right)^\alpha \right) = \int_0^{\left(\frac{\varepsilon}{\beta} \right)^\alpha} a^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-a} da \quad (3-10)$$

γ คือ Incomplete gamma function

เมื่อได้สมการความเค้นของการเชื่อมตอกันทั้ง 2 แบบแล้วนั้น ก็นำสมการทั้งหมดที่ได้ไปแทนในสมการที่ (3-2) $\sigma = \sigma_p + \sigma_c$ ก็จะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของยางคงรูปที่งานวิจัยนี้ออกแบบและสร้างขึ้นได้ดังนี้

$$\sigma = E_p \varepsilon [1 - (1 - e^{-\phi \varepsilon})] + E_c \left(\varepsilon - \frac{\beta}{\alpha} \gamma \left(\frac{1}{\alpha}, \left(\frac{\varepsilon(t)}{\beta} \right)^\alpha \right) \right) \quad (3-11)$$

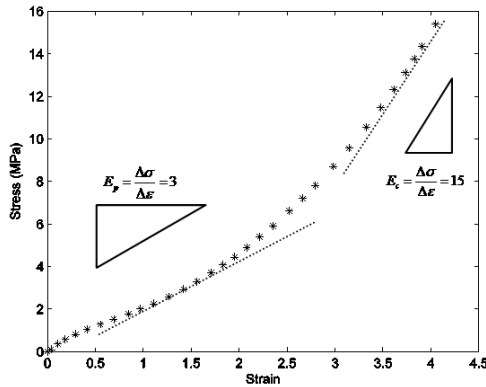
4. การหาค่าตัวแปรในแบบจำลอง

เมื่อได้ผลเฉลยของสมการแล้ว นำไปเขียนโค้ดลงโปรแกรม Matlab และทำ Curve Fitting จากข้อมูลผลการทดลอง เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ซึ่งจากสมการที่ (3-11) ค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ต้องการทั้งสิ้น 5 พารามิเตอร์ คือ $E_p, E_c, \phi, \alpha, \beta$

เนื่องจากสมการมีพารามิเตอร์หลายตัวซึ่งเป็นการยากต่อการหาผลเฉลยของค่าพารามิเตอร์ได้เพียงชุดเดียว ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้ประมาณค่า E_p และ E_c โดยให้ค่า E ทั้ง 2 เป็นค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นซึ่งหาได้จากความชันของกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดที่ได้จากการทดลอง ดังแสดงในรูปที่ 6 จะเห็นว่าค่า E_p จะถูกประมาณโดยใช้ค่าบริเวณปลายช่วงเริ่มต้น เนื่องจากเป็นช่วงที่พันธะทางกายภาพขาดออกจากกันจนใกล้จะหมด สำหรับ E_c จะถูกประมาณโดยใช้ค่าบริเวณช่วงฮาร์ดเทนนิ่ง เนื่องจากเป็นช่วงที่พันธะเคมีเริ่มมีบทบาทสำคัญในการรับแรงดึง

ส่วนค่าพารามิเตอร์ที่เหลือใช้เครื่องมือในโปรแกรม MATLAB ประมาณค่าด้วยการ Curve Fitting แล้วใส่สมการที่ (3-11) ในช่อง General

equation โดยให้ $\alpha > 0$, $\beta > 0$ และ $\phi > 0$ ก็จะได้ค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดได้และสามารถอธิบายพฤติกรรมการรับภาระแรงดึงของยางคงรูปโดยโมเดลจากงานวิจัยนี้ได้อย่างถูกต้อง

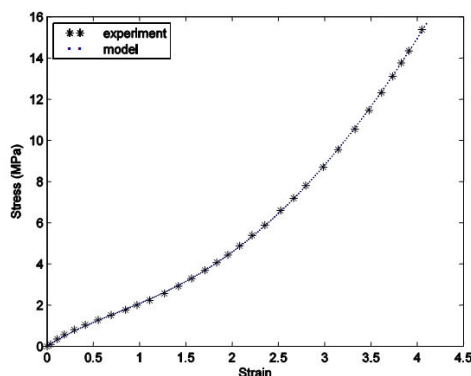


รูปที่ 6 แสดงวิธีการหาค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นที่เหมาะสมจากผลการทดสอบดึงยาง (Tensile test)

โดยซึ่งงานทดสอบนี้สามารถเลือก Fix ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นที่ $E_p = 3$, $E_c = 15$ และได้ค่า $\phi = 0.8041$, $\alpha = 1.267$ และ $\beta = 5.491$ ($R^2 \approx 1$) เมื่อได้ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมทั้ง 5 ตัวแล้ว นำมาพล็อตกราฟเพื่อเปรียบเทียบและวิเคราะห์ผลต่อไป

5. สรุปผลและวิเคราะห์ผล

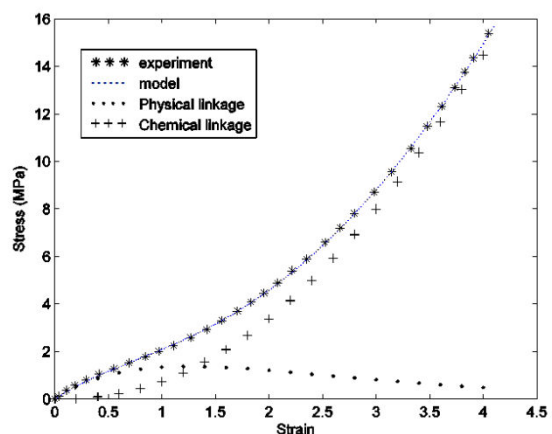
พารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ได้จากการประมาณค่าจากการทดลองและ Curve fitting สมการที่ (3-11) กับการทดลองคือ $E_p = 3$, $E_c = 15$, $\phi = 0.8041$, $\alpha = 1.267$ และ $\beta = 5.491$ ดังนั้นเมื่อนำพารามิเตอร์เหล่านี้มาแทนค่าในสมการที่ (3-11) เพื่อเทียบกับผลการทดลอง ดังแสดงในรูปที่ 7



รูปที่ 7 แสดงผลการเปรียบเทียบค่าความเค้นและความเครียดของผลการทดลองกับโมเดล

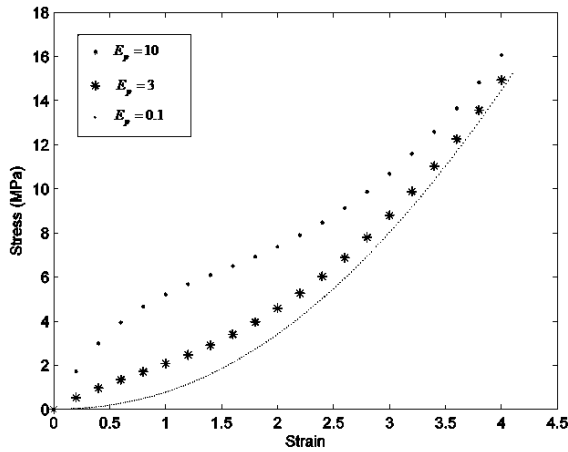
จะเห็นว่าเส้นกราฟที่ได้จากโมเดลมีค่าใกล้เคียงจากผลการทดลองมาก โดยโมเดลนี้สามารถแสดงพฤติกรรมเชิงกลของยางคงรูปขณะรับแรงดึงได้ดีมากในทุกช่วงความเครียด ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมมุติฐานที่ตั้งขึ้นในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้มีความใกล้เคียงกับพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจริงในขณะรับแรงดึง

เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดของพันธะทางกายภาพ, พันธะเคมี, ผลการทดลองและผลของแบบจำลองพบว่า ที่ความเครียดช่วงต้น ความเค้นในยางเกิดจากการรับแรงของพันธะทางกายภาพทั้งหมด ความเค้นของพันธะทางกายภาพจึงมีค่าเกือบเท่ากับความเค้นของโมเดลและผลการทดลอง เมื่อเข้าสู่ช่วงครากโซ่โมเลกุลของพันธะทางกายภาพเริ่มค่อยๆ ขาด ทำให้โซ่โมเลกุลของพันธะเคมีเริ่มรับแรง ส่งผลให้ความเค้นของพันธะทางกายภาพลดลงส่วนความเค้นของพันธะเคมีเพิ่มขึ้น และเมื่อเข้าสู่ช่วงฮาร์ดเดนนิ่งโซ่โมเลกุลของพันธะทางกายภาพขาดใกล้หมด ทำให้โซ่โมเลกุลของพันธะเคมีรับแรงมากขึ้น ส่งผลให้ความเค้นของพันธะทางกายภาพลดลงเกือบหมด ส่วนความเค้นของพันธะเคมีเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนเกือบเท่าความเค้นของโมเดลและผลการทดลอง ดังแสดงกราฟในรูปที่ 8



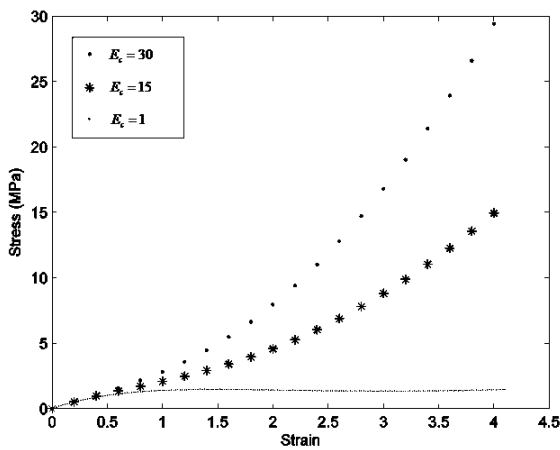
รูปที่ 8 แสดงผลที่เกิดขึ้นจากพันธะภายในของของคงรูปขณะรับแรงดึง

เมื่อพิจารณาผลกระทบของค่า E_p กับโมเดลพบว่ายิ่ง E_p มีค่ามาก ช่วงความเครียดเริ่มต้นยิ่งเกิดความเค้นสูงด้วย ดังแสดงกราฟในรูปที่ 9



รูปที่ 9 แสดงผลที่เกิดขึ้นของโมเดลจากการเลือก
 เปลี่ยนค่า $E_p = 10$ $E_p = 3$ $E_p = 0.1$

เมื่อพิจารณาผลกระทบของค่า E_c มีผลต่อโมเดลเฉพาะในช่วงฮาร์ดเดนนึง ยิ่ง E_c มีค่ามาก ค่าความเค้นในช่วงฮาร์ดเดนนึงก็สูงตามไปด้วย ดังแสดงกราฟในรูปที่ 10

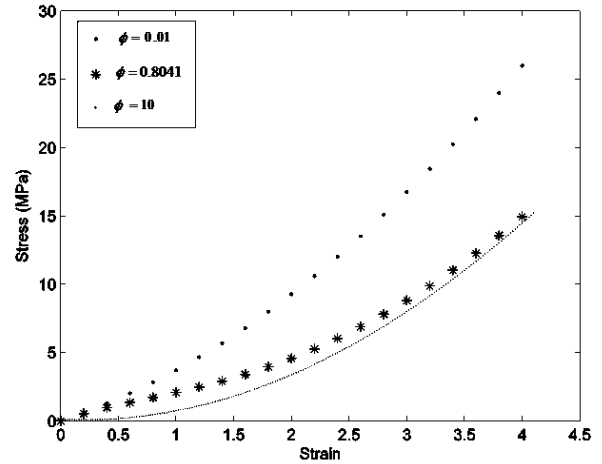


รูปที่ 10 แสดงผลที่เกิดขึ้นของโมเดลจากการเลือก
 เปลี่ยนค่า $E_c = 30$ $E_c = 15$ $E_c = 1$

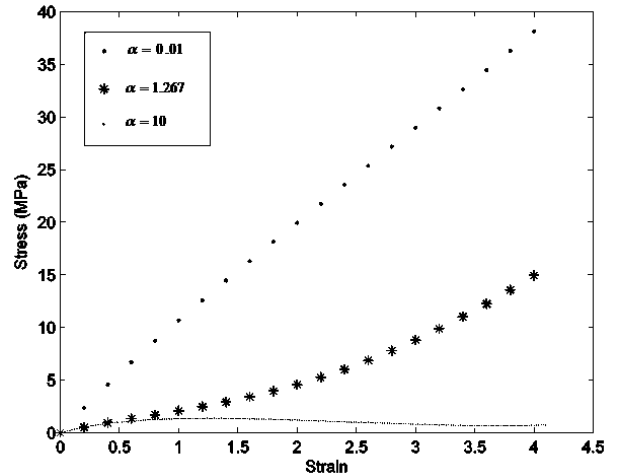
เมื่อพิจารณาผลกระทบของค่า ϕ มีผลแปรผกผันต่อโมเดล ยิ่ง ϕ มีค่ามากยิ่งทำให้พันธะทางกายภาพขาดเร็วมากขึ้น ส่งผลให้ค่าโมดูลัสของพันธะกายภาพลดลงเร็วขึ้น ทำให้ความเค้นของโมเดลในช่วงต้นนี้มีค่าลดลงด้วย ดังแสดงกราฟในรูปที่ 11

ส่วนค่า α และค่า β มีผลแปรผกผันต่อการรับแรงของพันธะเคมี คือ ยิ่งค่า α และค่า β มีค่ามากยิ่งทำให้การรับแรงของพันธะเคมีช้าลงส่งผลให้ค่าความเค้นของพันธะเคมีมีค่าน้อยลง จึงส่งผลให้โมเดล

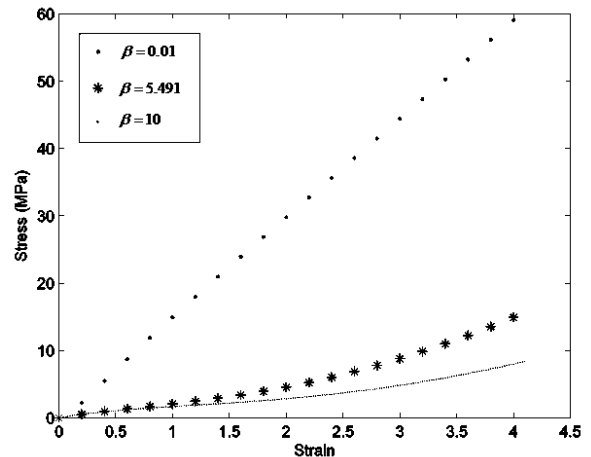
โดยเฉพาะช่วงฮาร์ดเดนนึงมีค่าความเค้นน้อยลงตามไปด้วย ดังแสดงกราฟในรูปที่ 12 และ 13



รูปที่ 11 แสดงผลที่เกิดขึ้นของโมเดลจากการเลือก
 เปลี่ยนค่า $\phi = 0.01$ $\phi = 0.8041$ $\phi = 10$



รูปที่ 12 แสดงผลที่เกิดขึ้นต่อโมเดลจากการเลือก
 เปลี่ยนค่า $\alpha = 0.01$ $\alpha = 1.267$ $\alpha = 10$



รูปที่ 13 แสดงผลที่เกิดขึ้นของโมเดลจากการเลือก
 เปลี่ยนค่า $\beta = 0.01$ $\beta = 5.491$ $\beta = 10$

จากการทดลองนี้ จะเห็นว่าโมเดลที่สร้างขึ้นนี้ สามารถอธิบายพฤติกรรมการรับภาระแรงและการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างภายในของยางคงรูปขณะรับแรงดึงได้อย่างสอดคล้องกัน และค่าพารามิเตอร์ในสมการของโมเดลนี้ ส่งผลโดยตรงต่อพฤติกรรมขณะรับแรงดึงของโมเดล ในการผลิตยางคงรูปให้ได้คุณสมบัติที่เหมาะสมต่อการใช้งาน ค่าพารามิเตอร์เหล่านี้สามารถสร้างเป็นความสัมพันธ์กับส่วนผสมของสารเคมีและนำไปสู่ความสามารถในการคาดคะเนความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณของส่วนผสมของสารเคมีในยางคงรูปกับคุณสมบัติเชิงกลของยางได้ จะสามารถคาดคะเนปริมาณที่ควรเติมได้อย่างเหมาะสมได้ต่อไป

6. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณ ดร.รัชดา โสภาคะยัง อาจารย์ที่ปรึกษาที่ให้คำแนะนำ คณาจารย์และเจ้าหน้าที่ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลทุกท่าน ขอขอบพระคุณบิดา มารดาของข้าพเจ้า ที่ให้ได้มีข้าพเจ้าในทุกวันนี้ และขอขอบพระคุณทุกๆ ท่านที่คอยช่วยเหลือที่มีอาจเอ่ยนามมาได้ทั้งหมดในที่นี้

7. เอกสารอ้างอิง

- [1] Goktepe, S. G., & Miehe, C. (2005). *A micro–macro approach to rubber-like materials. Part III: The micro-sphere model of anisotropic Mullins-type damage*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 53.
- [2] Sopakyang, R., Vita. (2011). *A mathematical model for creep, relaxation and strain stiffening in parallel-fibered collagenous tissues*, Medical Engineering & Physics 33 (2011) 1056– 1063
- [3] Sopakyang, R., Vita, R. D., Kwansa, A., & Freeman, J. W. (2011). *Elastic and viscoelastic properties of a type I collagen fiber*, Journal of Theoretical Biology 293 (2012) 197–205.

[4] Tomita, Y., Lu, W., Naito, M., & Furutani, Y. (2006). *Numerical evaluation of micro- to macroscopic mechanical behavior of carbon-black-filled rubber*, International Journal of Mechanical Sciences 48.

[5] จารุธรรม์ สังข์ปาน. *การวิเคราะห์สมบัติวิสโคไฮเปอร์อีลาสติกของยางคงรูปที่อุณหภูมิแตกต่างกัน*. วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, 2550.

[6] รพีภัทร์ วีระชาติพิทักษ์ชน. *การวิเคราะห์พฤติกรรมทางกลของวัสดุไฮเปอร์วิสโคอีลาสติกโดยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์*. วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, 2549.